MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie d'Orléans-Tours

Mercredi 16 mars de 8 heures à 12 heures 10

Pause de 10 h à 10 h 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux » pages 2 à 5). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques » pages 6 à 15). Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 9 h 30.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

8 h à 10 h

Première partie de l'épreuve

Exercices nationaux

Pages 2 à 5

Les candidats traitent **deux exercices :**

- Les candidats de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Échanges thermiques*) et 2 (*Liber abaci*).
- Les candidats des autres séries traitent les exercices numéros 1 (*Échanges thermiques*) et 3 (*Demi-tour !*)

Les copies concernant ces exercices nationaux seront ramassées au plus tard à 10 h.

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Échanges thermiques

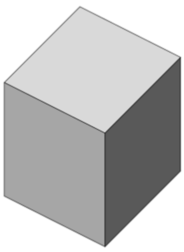
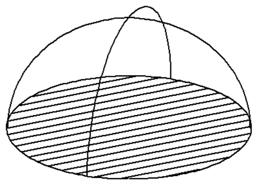
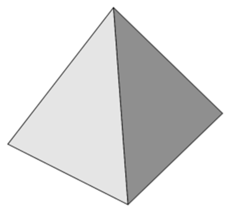
En architecture, on appelle facteur de compacité d'un bâtiment le rapport de la surface extérieure – y compris la base en contact avec le sol – de ce bâtiment, mesurée en m^2*, à son volume, mesuré en* m^3*. Le facteur de compacité* $c = \frac{S}{V}$, exprimé en m^{-1}*, donne une première évaluation grossière des performances thermiques d'une construction d'habitation.*

1. Calculs de compacité pour quelques volumes usuels, dessinés ci-dessous.

a. Déterminer le facteur de compacité d'un cube de côté *a*.

b. Déterminer celui d'une demi-sphère de rayon r. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$ et que sa surface a pour aire $4\pi r^2$.

c. Déterminer celui d'une pyramide régulière à base carrée de côté *a*, et de hauteur verticale *a*.

d. En quoi, d'après vous, le facteur de compacité est lié aux performances thermiques d'un bâtiment ?

2. On se propose d'étudier le facteur de compacité d'un pavé droit de volume 1 dont les dimensions en mètres sont x, y et z .

a. Vérifier que pour tous nombres a, b et c :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

b. En déduire que pour tous nombres réels positifs a, b et c, $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

c. En déduire que pour tous nombres réels positifs A, B et C dont le produit est égal à 1 :

$$A + B + C \geq 3.$$

d. Montrer que le facteur de compacité de ce pavé est : $c = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$.

e. Quel est le pavé droit de volume 1 qui rend minimal le facteur de compacité ?

3. Dans cette question, on désire déterminer tous les pavés droits dont le facteur de compacité est égal à 1 et dont les dimensions p, q et r, exprimées en mètres, sont des nombres entiers. On prendra $p \leq q \leq r$.

a. Établir que résoudre ce problème consiste à déterminer les triplets ordonnés d'entiers p, q et r tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}.$$

b. Démontrer que $3 \leq p \leq 6$.

c. Montrer que si $p = 3$ alors $7 \leq q \leq 12$.

d. Terminer la résolution.

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Liber abaci

Il y a 4000 ans, les anciens égyptiens utilisaient en calcul une propriété arithmétique bien étonnante : tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ strictement positif s'écrit comme une somme de fractions unitaires, c'est-à-dire d'inverses d'entiers positifs, tous différents les uns des autres. Depuis lors, une telle décomposition s'appelle une « écriture égyptienne ». Ainsi, la somme $\frac{1}{6}+\frac{1}{17}+\frac{1}{102}$ est-elle une « écriture égyptienne » du quotient $\frac{4}{17}$, tandis que les sommes $\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}$ et $\frac{1}{17}+\frac{3}{17}$ n'en sont pas. Plusieurs questions sur ces écritures demeurent, aujourd'hui, encore ouvertes.

1. Pourquoi les deux dernières décompositions données en préambule ne sont-elles pas des « écritures égyptiennes » ? Proposer une écriture égyptienne de $\frac{2}{3}$ comportant deux fractions unitaires, puis une autre de $\frac{2}{3}$ en comportant trois.

2. Un algorithme. Soient p et q des entiers tels que $0 < p < q$. Le quotient $\frac{p}{q}$ est donc un élément de $]0;1[$

Poser $k = 1$, $p_1 = p$, $q_1 = q$.
Tant que $p_k \neq 0$

> Déterminer le plus petit entier positif n_k tel que $\frac{1}{n_k} \leq \frac{p_k}{q_k}$. Ainsi : $\frac{1}{n_k} \leq \frac{p_k}{q_k} < \frac{1}{n_k - 1}$.
>
> Poser $p_{k+1} = p_k n_k - q_k$ et $q_{k+1} = q_k n_k$. Ainsi : $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{1}{n_k}$.
>
> Incrémenter k, c'est-à-dire augmenter la valeur du compteur k d'une unité.

Fin du Tant que.

a. On fait ici tourner l'algorithme sur le quotient $\frac{p}{q} = \frac{4}{17}$. Au début du premier tour de boucle, $k = 1$, $p_1 = 4$, $q_1 = 17$. On détermine alors $n_1 = 5$. Puis $p_2 = 3$, $q_2 = 85$ et k vaut 2 avant d'entrer dans le deuxième tour de boucle. Poursuivre jusqu'à l'arrêt complet. Que vaut $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}$? Les quatre fractions unitaires sont-elles distinctes ?

b. On suppose que l'algorithme prend fin à l'issue du *N*-ième tour de boucle. Justifier qu'il permet de donner une « écriture égyptienne » du quotient $\frac{p}{q}$.

c. Justifier clairement que l'algorithme ne peut être illimité.

Cet algorithme permet donc de donner une « écriture égyptienne » de n'importe quel nombre rationnel élément de $]0;1[$. Il appartient à une classe d'algorithmes dits « gloutons » et est attribué à Léonard de Pise, auteur du *Liber abaci* (1202).

L'adjectif « glouton » s'applique à des algorithmes faisant, à chaque étape, un choix optimal. L'optimalité globale n'est pas nécessairement atteinte comme en témoignent les deux décompositions de $\frac{4}{17}$ rencontrées dans ce problème.

3. Et pour $\frac{p}{q} \geq 1$?

a. L'algorithme précédent fonctionne-t-il pour $\frac{p}{q} > 1$?

b. Soit a un entier supérieur ou égal à 3.

Justifier que : $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}\dots+\frac{1}{2a-1}+\frac{1}{2a} > \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}\dots+\frac{1}{4a-1}+\frac{1}{4a} > 1$

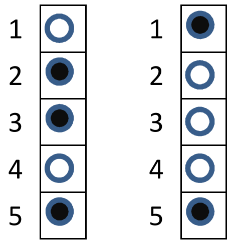
c. En déduire qu'il existe un entier naturel $b > a$ tel que :

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{b} \leq 1 < \frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}\dots+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}.$$

d. Établir alors que tout rationnel $\frac{p}{q} \geq 1$ admet lui aussi une « écriture égyptienne », puis une infinité.

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Demi-tour !



Avant Après

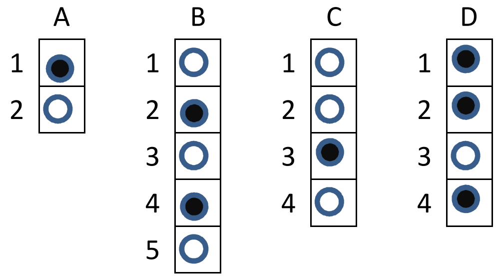
On dispose n pions verticalement. Ils sont noirs sur une face, blancs sur l'autre, et sont numérotés de 1 à n,. Au début du jeu, chaque pion présente aléatoirement sa face noire ou sa face blanche. **À chaque coup – qu'on appelle une *opération* dans toute la suite– on retourne un des pions *et* tous ses voisins du dessus.** Le dessin ci-contre donne l'exemple du changement qu'apporte à une configuration initiale une opération avec le troisième jeton.

L'objectif du jeu est de trouver une séquence d'opérations telle que tous les pions montrent leur face blanche.

1. L'ordre dans lequel se succèdent deux opérations a-t-il de l'importance ?

2. Quel est l'effet combiné de deux opérations identiques ?

3. Indiquer les numéros des pions à retourner pour ne voir que des faces blanches, dans les situations représentées ci-contre.



4. On donne l'algorithme suivant, pour une configuration de n cases :

Pour k allant de n à 1 par pas de -1

Si le jeton k est noir, effectuer une opération avec ce jeton

Fin Pour

a. Expliquer pourquoi cet algorithme blanchit la colonne en un minimum d'opérations. Combien d'opérations met-il au maximum en œuvre ?

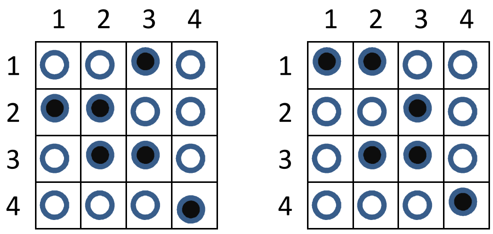
b. Donner un exemple de configuration de n cases nécessitant n opérations.

5. Dans cette question et les suivantes, on change légèrement les règles du jeu en en proposant des variantes :

a. À chaque coup – qu'on appelle toujours une opération – on retourne un des pions et son voisin du dessus uniquement (quand il en a un). Prouver qu'il est toujours possible de blanchir la colonne.

b. À chaque coup – qu'on appelle toujours une opération – on retourne un des pions et son voisin du dessus quand il en a un, le dernier sinon. Ainsi, agir sur le pion n°1 retourne et le n°1 et le n° n. Donner, en le justifiant, un exemple de configuration à 4 jetons qui soit impossible à blanchir.

6. Jeu à deux dimensions.



Avant Après

On considère maintenant un plateau carré de $n \times n$ cases. Les jetons ont une face noire et une blanche. Le but du jeu est de rendre visible les seules faces blanches. Les cases sont numérotées de haut en bas et de gauche à droite, et le jeton situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est appelé jeton (i, j). Une *opération* est définie ainsi : **lorsque l'on retourne le jeton (i, j), on forme un rectangle dont le coin supérieur gauche est le jeton $(1, 1)$ et le coin inférieur droit est le jeton (i, j) : tous les jetons situés dans ce rectangle sont retournés.** L'exemple ci-dessus montre ce qu'il se passe quand on retourne le jeton (2, 3) d'un plateau 4 x 4.

Proposer un algorithme qui fasse apparaître toutes les faces blanches d'un plateau $n \times n$ en moins de n^2 opérations.

7. Proposer un jeu analogue à trois dimensions.

Olympiades académiques de mathématiques

Deuxième partie de l'épreuve

10 h 10 à 12 h 10 **Exercices académiques**

Pages 6 à 15

Les candidats traitent **deux exercices :**

- Les candidats de la série S traitent les exercices numéros 4 (*Des nombres en forme*) et 5 (Tas de sable, des tas de situations).
- Les candidats des autres séries traitent les exercices numéros 4 (*Des nombres en forme*) et 6 (Gauche, droite !).

Les copies concernant ces exercices académiques seront ramassées au plus tard à 12 h 10.

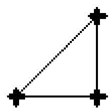
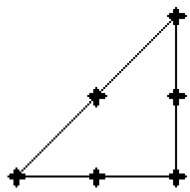
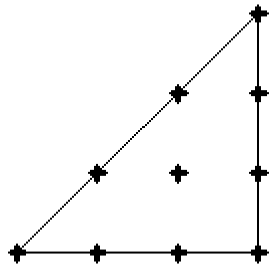
Cette partie comporte deux pages annexes (pages 14 et 15) **<u>à rendre avec la copie.</u>**

Exercice académique numéro 4 (à traiter par tous les candidats)

Des nombres en forme

<u>Première partie</u> : Des nombres en triangle

Les figures ci-dessous décrivent la construction des premiers « nombres triangulaires ».

Étape	**Étape n°1**	**Étape n°2**	**Étape n°3**	**Étape n°4**
Figure				
Nombre de points	**1 point**	**3 points**	**6 points**	**10 points**
Nombres triangulaires	$T_1 = 1$	$T_2 = 3$	$T_3 = 6$	$T_4 = 10$

Ainsi T_4 est le quatrième nombre triangulaire et vaut 10.

Pour tout entier naturel *n* non nul, on note T_n le nombre de points situés à l'intérieur ou au bord du triangle obtenu à la $n^{ième}$ *étape.* Les nombres T_n sont appelés des nombres triangulaires.

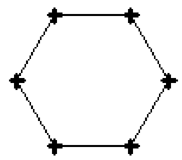
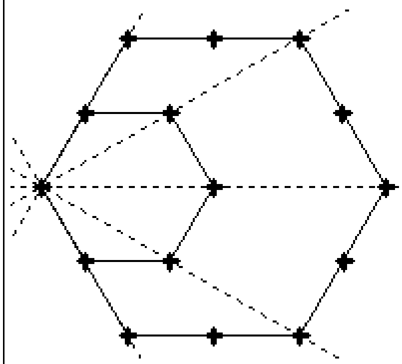
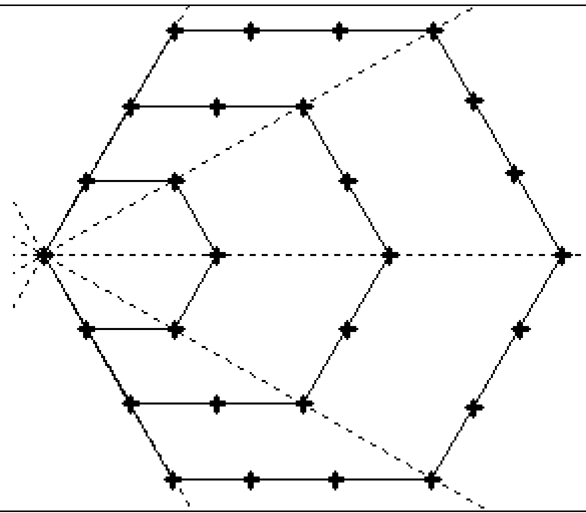
1. Donner la valeur de T_5 et de T_6 .
2.
   a. Construire la figure de l'étape n°5 et justifier l'égalité $2\times T_6 - 6 = 6^2$.

   b. Sans faire explicitement la figure, expliquer comment justifier l'égalité $2\times T_{20} - 20 = 20^2$.

   c. Justifier que pour tout *n* entier naturel non nul on a : $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$
3. 2016 est-il un nombre triangulaire ?

<u>Deuxième partie</u> : Des nombres en hexagone

Les figures ci-dessous décrivent la construction des premiers « nombres hexagonaux ».

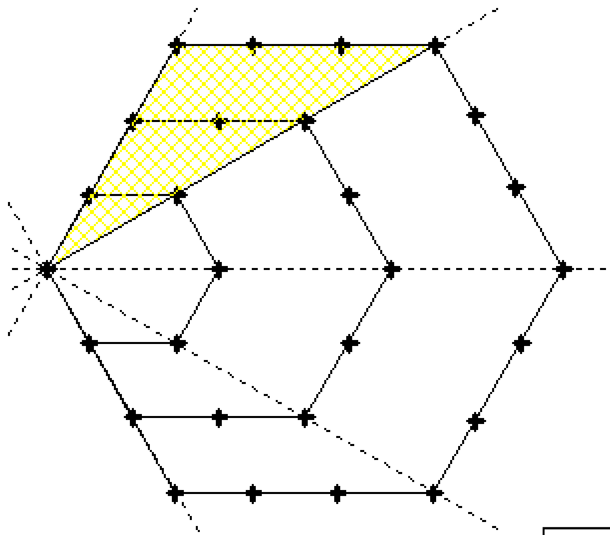
Étape	**Étape n°1**	**Étape n°2**	**Étape n°3**	**Étape n°4**
Figure				
Nombre de points	**1 point**	**6 points**	**15 points**	**28 points**
Nombres hexagonaux	$H_1 = 1$	$H_2 = 6$	$H_3 = 15$	$H_4 = 28$

Ainsi H_4 est le quatrième nombre hexagonal et vaut 28.

Pour tout entier naturel *n* non nul, on note H_n le nombre de points de la figure obtenus à la n[ième] étape. Les nombres H_n sont appelés des nombres hexagonaux.

1. Représenter sur le document en annexe 1, **à rendre avec la copie**, la figure obtenue à l'étape n° 5 et donner la valeur de H_5.

2. Vérifier que le nombre de points de la partie hachurée de la figure ci-contre est égal à T_4.



3. Pour tout entier naturel *n* non nul, exprimer H_n en fonction de T_n.
4. En déduire que pour tout entier naturel *n* non nul on a $H_n = 2n^2 - n$.
5. 2016 est-il un nombre hexagonal ?
4.
    a. Montrer que tout nombre hexagonal est également un nombre triangulaire.
    b. La réciproque est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

Exercice académique numéro 5 (à traiter par les candidats de la série S)

Tas de sable, des tas de situations

Dans cet exercice, on verse une quantité de sable maximale sur une plaque horizontale ayant la forme d'un polygone. Selon la nature du polygone, les tas de sable prennent des formes différentes comprenant des sommets et des arêtes.

Figure 1 :
Plaque rectangulaire

Figure 2 :
Plaque triangulaire

Figure 3 :
Plaque « en L »

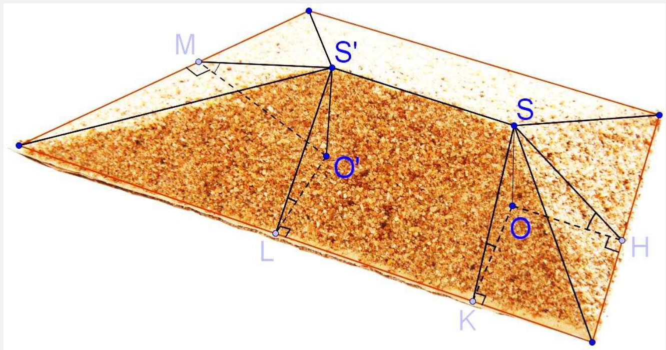
L'objectif de cet exercice est d'étudier la forme géométrique du tas de sable obtenu pour chacune des trois plaques ci-dessus.

PRINCIPE GÉNÉRAL :

Pour le tas de sable ci-contre :

- S est un sommet du tas de sable
- O est le projeté orthogonal du point S sur le polygone de base
- H est le projeté orthogonal de O sur un coté du polygone.

L'angle $\widehat{SHO}$ est appelé l'angle de talus.



Sur la figure ci-dessus, $\widehat{SKO}$, $\widehat{S'LO'}$, $\widehat{S'MO'}$ sont d'autres angles de talus et le principe physique des tas de sable permet de considérer que l'angle de talus est constant c'est-à-dire que :

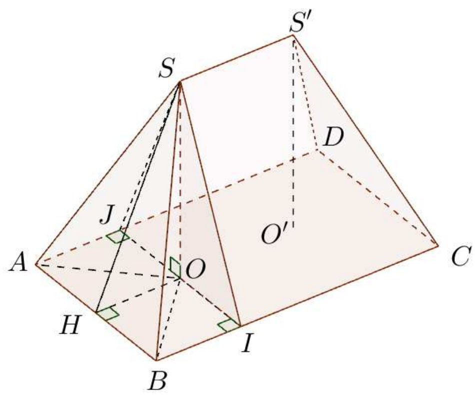
$$\widehat{SHO} = \widehat{SKO} = \widehat{S'LO'} = \widehat{S'MO'}.$$

Rappel d'un résultat :
On rappelle que la bissectrice d'un angle est l'ensemble des points équidistants des côtés de l'angle.

1. Cas où la plaque est un rectangle.

Dans cette question la plaque est un rectangle $ABCD$ (figure 1).
Le tas de sable comprend deux sommets S et S' et une arête $[SS']$.
On note O et O' les projetés orthogonaux respectifs de S et S' sur la base $ABCD$.
On note H, I et J les projetés orthogonaux respectifs de O sur les segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AD]$. De même K, L et M sont les projetés orthogonaux respectifs de O' sur les segments $[CD]$, $[AD]$ et $[BC]$.
Le principe physique des tas de sable permet d'affirmer que :

$$\widehat{SHO} = \widehat{SIO} = \widehat{SJO} = \widehat{S'KO'} = \widehat{S'LO'} = \widehat{S'MO'}.$$



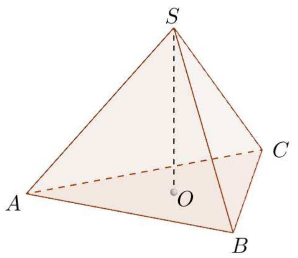
a. Démontrer le point O est l'intersection des bissectrices des angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$.

b. En déduire une construction du point O'.

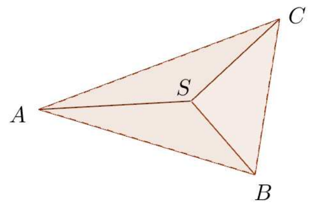
c. Démontrer que la droite (OO') est parallèle aux cotés du rectangle.
d. On dispose de la plaque rectangulaire fournie en annexe 2 **à rendre avec la copie**.
Tracer avec précision la vue de dessus du tas de sable obtenu avec une telle plaque.
e. Que se passe-t-il quand la plaque fournie est un carré ?

2. Cas où la plaque est un triangle.

Dans le cas d'une plaque triangulaire ABC (figure 2), le tas de sable est une pyramide $ABCS$.
Comme précédemment, on note O le projeté orthogonal de S sur la face ABC.



Vue en perspective

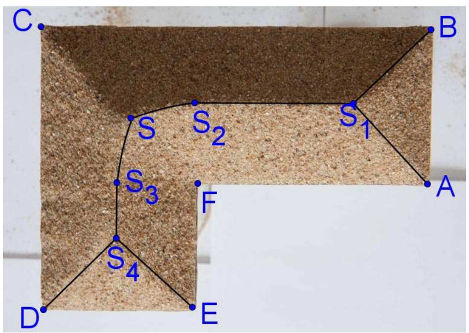


Vue de dessus

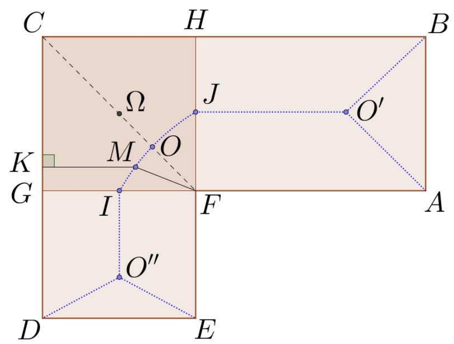
Déterminer une méthode de construction du point O en justifiant votre réponse.
La réaliser sur la figure présente en annexe 2 **à rendre avec la copie**.

3. Cas où la plaque est en « L ».

Dans cette question la plaque est le polygone $ABCDEF$ (figure 3) où $ABHF$ et $DEFG$ sont des rectangles et $CGFH$ est un carré de centre Ω.
L'allure des arêtes du tas de sable est donnée par les figures ci-dessous.



Vue de dessus



Projection des arêtes et sommets sur la plaque

On admet que :

- Les points I et J sont les milieux respectifs de $[GF]$ et $[FH]$;
- les arcs $\widehat{IO}$ et $\widehat{JO}$ sont symétriques par rapport à la droite (CF) ;
- M est un point de l'arc $\widehat{IO}$ si et seulement si $MF = MK$ où K est le projeté orthogonal de M sur $[CG]$.

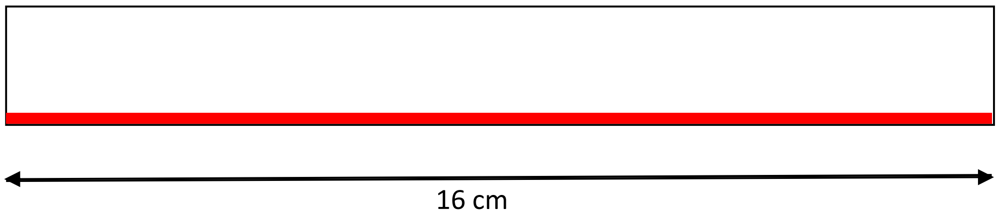
L'objectif de cette question est de tracer avec précision la vue du dessus du tas de sable.

a. Expliquer comment sont construits les points O' et O''.
b. On considère un point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(\Omega; I, J)$.
   i. Vérifier que le point M appartient à l'arc $\widehat{IO}$ si et seulement si :
   $$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2.$$
   ii. En déduire que l'arc $\widehat{IO}$ est la représentation graphique d'un arc de parabole.
c. On dispose de la plaque « en L » fournie en annexe 2 **à rendre avec la copie**.
Tracer avec précision la vue de dessus du tas de sable obtenu avec une telle plaque.

Exercice académique numéro 6 (à traiter par les candidats <u>autres</u> que la série S)

Gauche, droite !

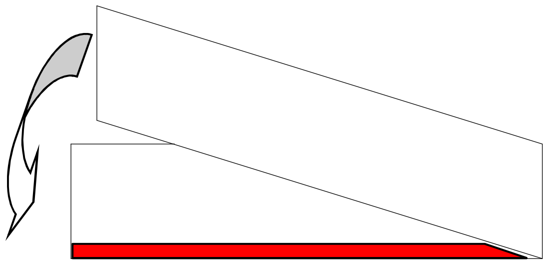
On considère une bande de papier de longueur 16 cm dont le bord inférieur est colorié.



Le but de cet exercice est de trouver la forme de cette bande de papier après des pliages successifs.

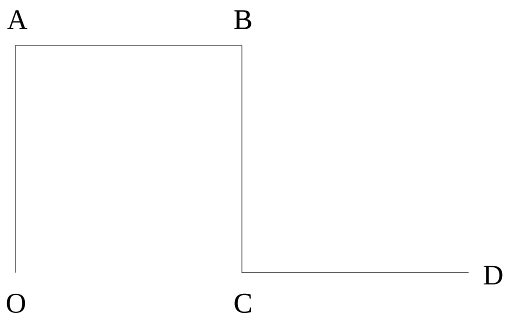
1ère étape

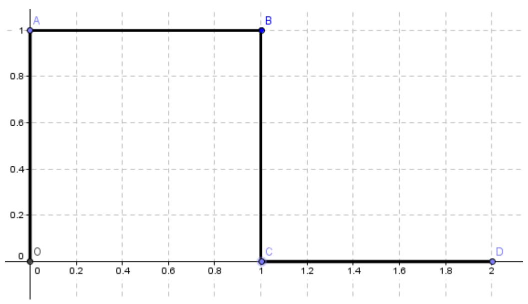
La bande de papier est pliée en deux en rabattant le bord situé à droite sur le bord situé à gauche.



2ème étape

On recommence l'opération sur le pliage précédent. On déplie ensuite la bande de papier de telle sorte que chaque pli se transforme en un angle droit. En posant ce pliage sur une table, côté rouge vers la table, on obtient la figure suivante :





On dispose la ligne brisée OABCD, formée de segments d'égale longueur, dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 4 cm, de manière à ce que le point A ait pour coordonnées (0;1).

Cette figure géométrique est codée (d,d,g) pour « droite, droite, gauche » qui correspond au parcours en partant du point O :

« Aller de O à A, tourner de 90° à droite pour aller à B, tourner de 90° à droite pour aller à C, tourner de 90° à gauche pour aller à D ».

On notera *ligne*$_2$ = OABCD et *pliage*$_2$ = (d,d,g)

Cette construction est répétée par pliages successifs. Dans la suite les lignes brisées seront représentées dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ en partant du point O et en disposant l'extrémité du premier segment sur l'axe des ordonnées, avec une ordonnée positive.

1.
   a. Dessiner la figure *ligne*$_3$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et préciser le codage *pliage*$_3$.

   b. Quelles sont les coordonnées de l'extrémité de la ligne brisée (autre que le point O) ?

2.
   a. Dessiner la figure *ligne*$_4$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et préciser le codage *pliage*$_4$.

   b. Quelles sont les coordonnées de l'extrémité de la ligne brisée (autre que le point O) ?

   c. Expliquer comment obtenir le codage *pliage*$_4$ à partir du codage *pliage*$_3$.

   d. Expliquer comment obtenir les coordonnées de l'extrémité de la ligne brisée *ligne*$_4$ à partir des coordonnées de l'extrémité de la ligne brisée *ligne*$_3$.

3. Déterminer les coordonnées de l'extrémité de la ligne brisée *ligne*$_6$.

4. Le codage de *pliage*$_2$ comporte 3 éléments : *d, d,* et *g.*

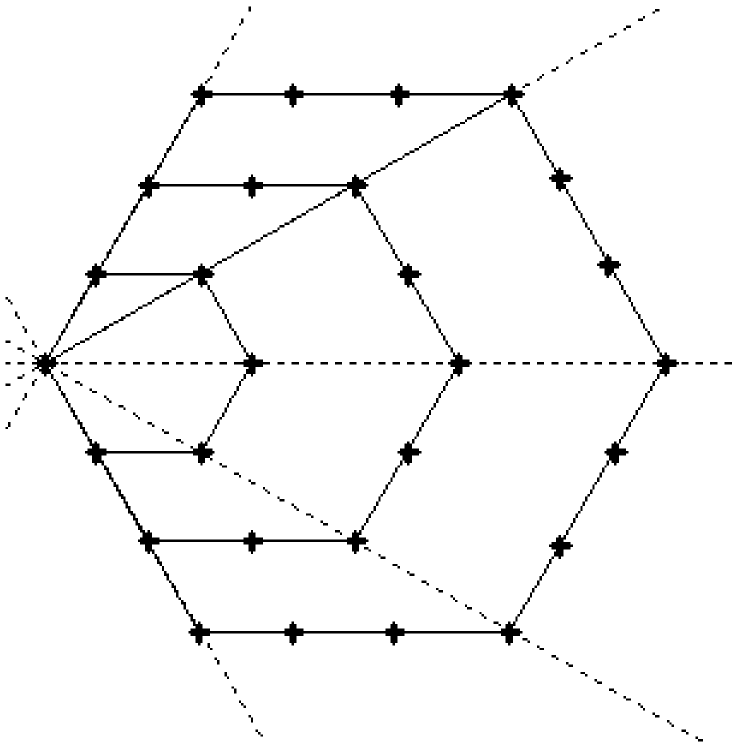
   a. Combien *pliage*$_3$ et *pliage*$_4$ comportent-ils d'éléments ?

   b. *n* est un entier naturel non nul quelconque. Conjecturer le nombre d'éléments de *pliage*$_n$. Quelle est la longueur de chacun des côtés de la ligne brisée *ligne*$_n$?

Annexe 1 à rendre avec la copie

Exercice académique n° 4 pour tous les candidats

Deuxième partie question 1

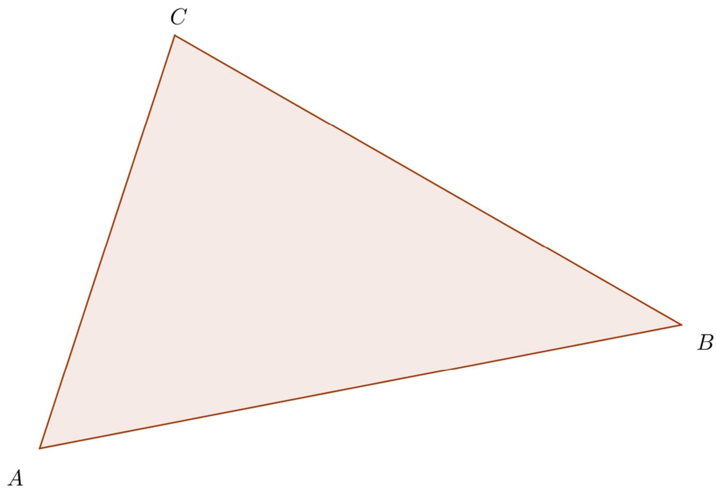


Annexe 2 à rendre avec la copie

Exercice 5 pour les candidats de la série S

<u>Question 1</u> : Figure à compléter

<u>Question 2</u> : Figure à compléter



<u>Question 3</u> : Figure à compléter