ACADEMIE DE CAEN

Olympiades 2007

EXERCICE 1 (exercice national :

Un problème de tas

On dispose de 7 objets que l'on répartit en autant de tas que l'on veut, chaque tas contenant autant d'objets que l'on veut.
Une manipulation consiste à enlever un objet de chaque tas et à faire un nouveau tas des objets ainsi récupérés.

Exemple : une répartition possible au départ sera notée (4,3),
elle signifie qu'on a deux tas, l'un de 4 objets et l'autre de 3 objets,
après une manipulation, on obtiendra donc la répartition (3,2,2).

Avertissement : on considère que les répartitions (4,3) et (3,4) sont identiques.
De même les répartitions (3,2,2), (2,3,2) et (2,2,3) sont identiques.

1°) On place les 7 objets en un seul tas ; la répartition est donc (7).
Quelle répartition obtiendra-t-on après 3 manipulations ? Après 7 manipulations? Après 11 manipulations ? Après 2007 manipulations ?

2°) Ici, on ne connaît pas la répartition initiale, mais après 2007 manipulations, on obtient la répartition (4,2,1).
Indiquer toutes les répartitions initiales possibles.

3°) Paul et Virginie jouent ensemble.
Au départ, Paul dispose les objets sans montrer la répartition à Virginie. Puis il simule sur son ordinateur 2007 manipulations et ne montre à Virginie que la répartition finale. Il demande alors à Virginie de deviner la répartition initiale.
Virginie réfléchit et avoue ne pas savoir répondre car elle hésite entre trois répartitions.
Sachant que Virginie a raisonné correctement, quelle répartition finale a-t-elle vue ?

Pour les candidats de la série S
EXERCICE 2 :

Le rugby

Questions préliminaires

Sur une droite (D), on place dans cet ordre trois points A, B et H distincts deux à deux et (Δ) une droite perpendiculaire à (D) en H. On trace un cercle (C) de rayon R qui vérifie les deux conditions :

- il passe par A et B
- il coupe la droite (Δ) en deux points M et N.

1°) Comparer les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$. (Justifier)

2°) Si le rayon R augmente, dire (sans justification) comment évolue la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$?

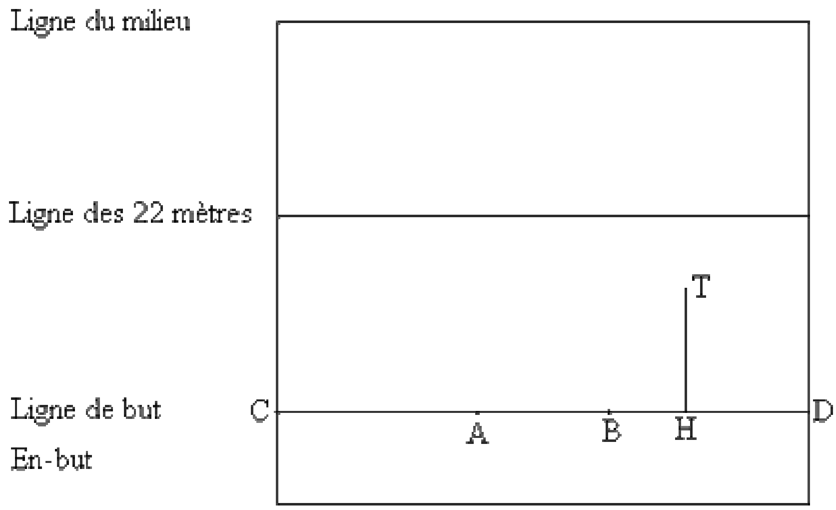
3°) Si le rayon R diminue, que se passe-t-il pour l'angle $\widehat{AMB}$ et pour les points M et N ?

On admettra la relation suivante : soit une droite (Δ) tangente au point T à un cercle (C), A et B deux points de (C) et H le point d'intersection entre la droite (Δ) et la droite (AB), on a la relation : $HA \times HB = HT^2$

Problème.

Pour transformer un essai au rugby, le botteur doit se placer en face de l'endroit où l'essai a été marqué (en H sur la figure ci-dessous) et faire passer la balle entre les deux poteaux A et B.
Pour simplifier on négligera la hauteur de la barre horizontale.

Plan partiel d'un terrain de rugby



On a : AB (largeur des poteaux) = 5,6m et CD (largeur du terrain) = 70m.

Le problème n'a un sens que dans le cas où H est entre B et D.

On note : BH = x et HT = y.

1°) Montrer que se placer en T, point défini dans les préliminaires, est la meilleure position, c'est-à-dire celle où l'angle sous lequel le botteur voit les deux poteaux est le plus grand ?

2°) Exprimer la distance y en fonction de x pour que l'angle sous lequel le botteur voit les deux poteaux soit le plus grand.

3°) Dans cette question le point H est en D. Le botteur se place pour voir les poteaux sous l'angle le plus grand. Quelle est alors la longueur minimum du tir ?

4°) Sur l'intervalle [0 ; 29], tracer la représentation de la fonction f définie par f(x) = x et de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x(x+5{,}6)}$.

5°) Lorsqu'un botteur, qui cherche à ouvrir au maximum son angle de tir, se place sur « la ligne des 22 mètres », que peut-on conjecturer sur l'endroit où a été marqué l'essai ?

6°) Lors des matches, pour transformer un essai qui n'a pas été marqué à une distance trop proche du poteau B, le botteur se recule d'une distance égale à la longueur BH augmentée de 2 ou 3 pas. Justifier cette pratique.

EXERCICE 3 (EXERCICE 2 des séries autres que S) :

Des carrés parfaits

1, 4, 9, 16, 25….. sont des carrés parfaits.

2, 3, 5, 6, 7…….. ne sont pas des carrés parfaits.

Le but de l'exercice est de déterminer des entiers naturels non nuls a et n (avec a < n) de telle sorte que les trois entiers naturels distincts n – a, n et n + a soient des carrés parfaits.
Le triplet (n - a , n , n + a) est appelé une solution du problème.

1°) Peut-on trouver une solution pour n = 9 ? Pour n = 16 ? Pour n = 25 ?

2°) Soit k, p, q, r des entiers strictement positifs.
Prouver que si $\left(p^2, q^2, r^2\right)$ est une solution du problème alors $\left((kp)^2, (kq)^2, (kr)^2\right)$ en est une autre.

3°) En déduire 3 solutions du problème.

4°) Trouver une solution du problème telle que n + a = 529.

5°) On cherche toutes les solutions de la forme $\left(1, q^2, r^2\right)$

A l'aide d'une calculatrice, trouver toutes les solutions telles que $q \leq 250$.

Pour les candidats de toutes les séries sauf S

EXERCICE 3 :

Des triangles équilatéraux

Soit $A_0B_0C_0$ un triangle équilatéral tel que $A_0B_0 = 1$ (exprimé en unité de longueur).

On définit les points A_1, B_1 et C_1 les milieux respectifs des côtés $[A_0B_0]$, $[B_0C_0]$ et $[C_0A_0]$, puis les points A_2, B_2 et C_2 les milieux respectifs des côtés $[A_1B_1]$, $[B_1C_1]$ et $[C_1A_1]$, et ainsi de suite, on définit les points A_n, B_n et C_n.

1°) Montrer que C_2 puis A_2 appartiennent à la droite (A_0B_1).

2°) Soit a_n l'aire du triangle $A_nB_nC_n$.

Existe-t-il un entier naturel n tel que $a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{16384}$?

3°) Montrer que tous les triangles $A_nB_nC_n$ ont le même centre de gravité G.

4°) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que le triangle $A_{n_0}B_{n_0}C_{n_0}$ soit à l'intérieur du cercle de centre G et de rayon 10^{-3}.

EXERCICE 4 (exercice national) :

Des trapèzes de même aire

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une parallèle donnée à leurs bases.

1°) <u>Question préliminaire</u>

Existe-t-il un couple d'entiers naturels (m , p) tel que $m^2 - p^2 = 8$?

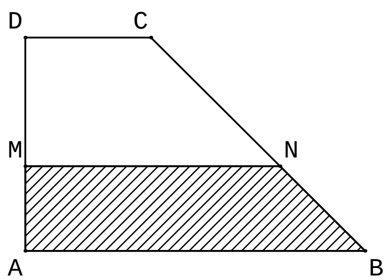
En existe-t-il plusieurs?

(Le résultat de cette question peut être exploité dans la suite de l'exercice, selon la méthode utilisée pour la traiter).

2°) On considère les trapèzes rectangles ABCD de bases [AH] et [CD] tels que :

- $\widehat{ABC} = 45°$
- les distances AB, AD et CD sont des nombres entiers, et AD > 2.

Soit M le point du segment [AD] tel que AM = 2.



Déterminer les distances AB, AD et CD de sorte que les aires des trapèzes MNBA et MNCD soient égales.

<u>Indication</u>: On pourra faire apparaître sur la figure des triangles isocèles.

Corrigé de l'exercice N°1 (exercice national)

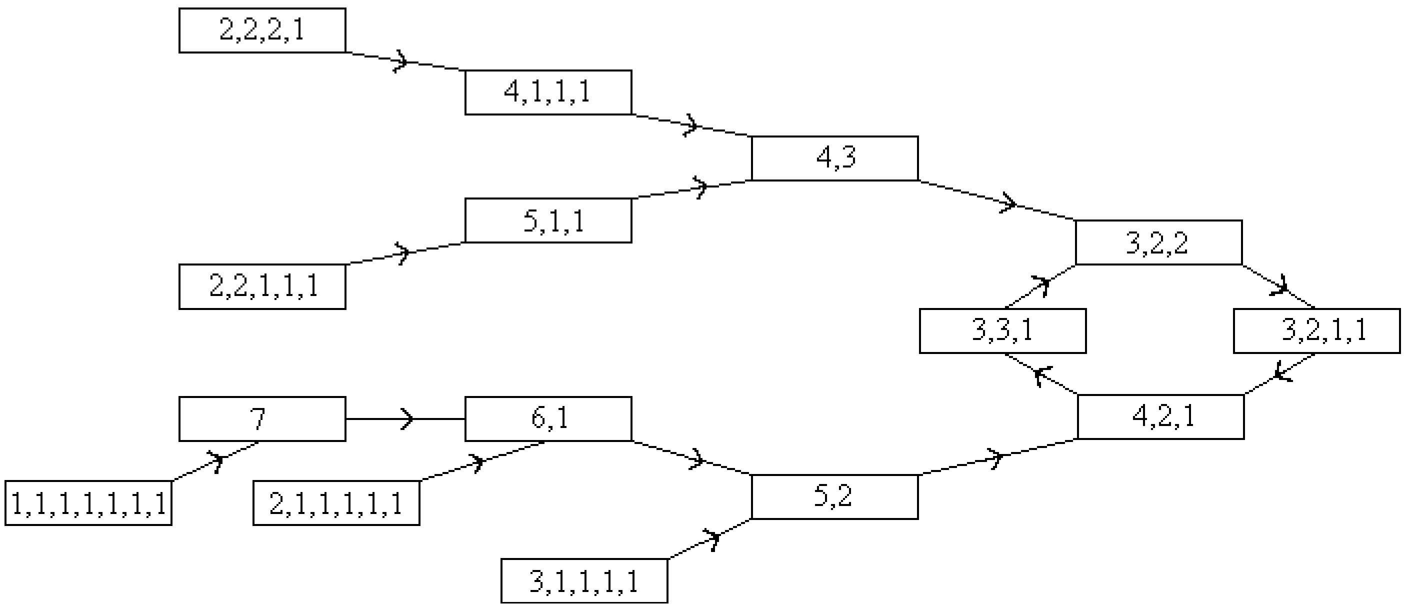
1°) On étudie les répartitions successives obtenues à partir de la répartition (7).
(7) donne (6,1)   (6,1) donne (5,2)   (5,2) donne (4,2,1)
(4,2,1) donne (3,3,1)   (3,3,1) donne (3,2,2)   (3,2,2) donne (3,2,1,1)   (3,2,1,1) donne (4,2,1).

Après 7 manipulations, on obtient la même répartition que celle qu'on a obtenue après 3 manipulations.
Donc après 7 manipulations, on n'obtiendra plus que des répartitions qu'on a déjà obtenues :
la 7ème est la même que la 3ème la 8ème est la même que la 4ème
la 9ème est la même que la 5ème la 10ème est la même que la 6ème .
Donc la 11ème est la même que la 7ème soit (4,2,1).

La suite des répartitions est donc périodique avec une période de longueur 4.
Or $2007 = 3 + 501 \times 4$.
Par conséquent, après 2007 manipulations, on obtiendra la même répartition qu'après la 3ème manipulation soit encore une fois (4,2,1).

2°) On peut recenser toutes les répartitions possibles :
- avec 1 tas : (7)
- avec 2 tas : (6,1) , (5,2) , (4,3)
- avec 3 tas : (5,1,1) , (4,2,1) , (3,3,1) , (3,2,2)
- avec 4 tas : (4,1,1,1) , (3,2,1,1) , (2,2,2,1)
- avec 5 tas : (3,1,1,1,1) , (2,2,1,1,1)
- avec 6 tas : (2,1,1,1,1,1)
- avec 7 tas : (1,1,1,1,1,1,1).

On peut alors déterminer la répartition « fille » après 1 manipulation de chacune des répartitions. Le résultat de cette étude peut être présenté sous la forme du schéma suivant :



On constate sur ce schéma deux propriétés remarquables :
- certaines répartitions ne sont issues d'aucune autre
- il existe, sur le côté droit du schéma, un cycle de 4 répartitions dans lequel on rentre au bout d'un nombre limité de manipulations (4 au plus) et dont on ne sort plus.

Ce cycle est formé de 4 répartitions mais il n'existe que 2 points d'entrée dans le cycle.

On a déjà vu que $2007 = 3 + 501 \times 4$.
Or on constate sur le schéma qu'aucun chemin menant à la répartition (4,2,1) et ne comportant pas de tour entier du cycle n'a une longueur supérieure à 5.
La seule façon d'aboutir à la répartition (4 ,2,1) après 2007 manipulations est donc de partir d'une répartition menant à (4,2,1) en 3 manipulations puis de faire 501 tours de cycle.

On voit alors aisément sur ce schéma que quatre répartitions se situent à 3 manipulations de (4,2,1) : ce sont (3,3,1) , (4,3) , (7) et (2,1,1,1,1,1).

3°) Après 2007 manipulations, on obtient obligatoirement une répartition du cycle, c'est donc l'une de ces quatre répartitions que Paul a montré à Virginie.

On vient de voir que quatre répartitions peuvent conduire en 2007 manipulations à la répartition (4,2,1). Ce n'est donc pas la répartition (4,2,1) que Paul a montrée à Virginie.

Etudions le même problème pour les trois autres répartitions du cycle.

Le plus long chemin menant pour la première fois à la répartition (3,3,1) a pour longueur 6. La seule façon d'aboutir à la répartition (3,3,1) après 2007 manipulations est donc de partir d'une répartition menant à (3,3,1) en 3 manipulations puis de faire 501 tours de cycle. Les répartitions se situant à 3 manipulations de (3,3,1) sont (3,2,2) , (6,1) et (3,1,1,1,1).

Le plus long chemin menant pour la première fois à la répartition (3,2,2) a pour longueur 6. La seule façon d'aboutir à la répartition (3,2,2) après 2007 manipulations est donc de partir d'une répartition menant à (3,2,2) en 3 manipulations puis de faire 501 tours de cycle. Les répartitions se situant à 3 manipulations de (3,2,2) sont (3,2,1,1) , (2,2,2,1) , (2,2,1,1,1) , (5,2).

Le plus long chemin menant pour la première fois à la répartition (3,2,1,1) a pour longueur 7. Il y a donc deux façons d'aboutir à la répartition (3,2,1,1) après 2007 manipulations :
- ou bien, on part d'une répartition menant à (3,2,1,1) en 3 manipulations puis on fait 501 tours de cycle
- ou bien, on part d'une répartition menant à (3,2,1,1) en 7 manipulations puis on fait 500 tours de cycle.

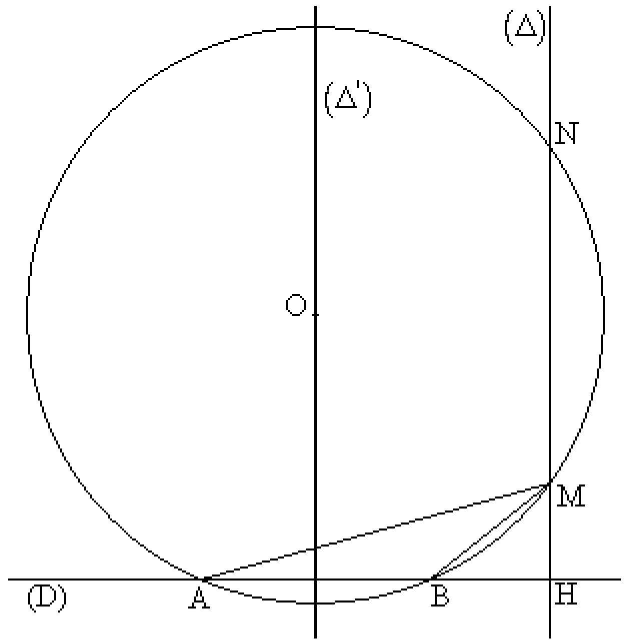
Pour le premier cas, les répartitions (4,2,1) , (4,1,1,) , (5,1,1) conviennent.
Pour le second cas, la répartition (1,1,1,1,1,1,1) convient.

La seule répartition finale laissant à Virginie l'hésitation entre trois répartitions initiales est donc (3,3,1).

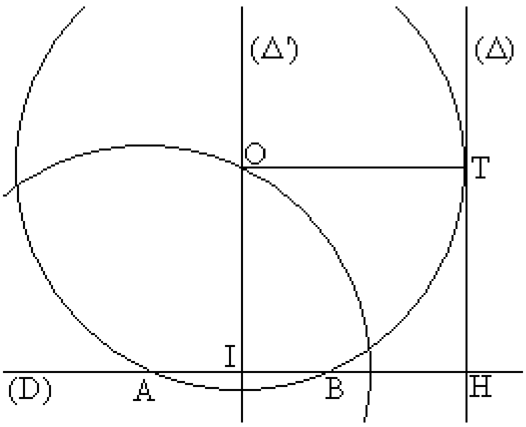
Pour les candidats de la série S
Corrigé de l'exercice N°2

Questions préliminaires

1°) $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$: ils sont donc égaux.



2°) Appelons M celui des deux points M et N qui est le plus proche de la droite (D). Si R augmente, le point M se rapproche de la droite (AB), l'angle $\widehat{AMB}$ diminue et se rapproche de 0, valeur qu'il atteindrait si M arrivait en H.



3°) Si R diminue, les points M et N se rapprochent l'un de l'autre. L'angle $\widehat{AMB}$ augmente jusqu'à ce que les deux points M et N soient confondus, c'est-à-dire que le cercle soit tangent à la droite (Δ).
Le point de tangence est le point T ainsi défini : soit I le milieu de [AB] et (Δ') la médiatrice de [AB] ; tous les points de (Δ') sont à la distance IH de (Δ) ; soit O l'un des points d'intersection de (Δ') et du cercle de centre A et de rayon IH ; T est le projeté orthogonal de O sur (Δ').

Problème

1°) D'après le 2°) et le 3°) des questions préliminaires, l'angle $\widehat{AMB}$ est maximum lorsque M est en T.

2°) On donne, à la fin des questions préliminaires, la relation $HA \times HB = HT^2$.
En exprimant cette relation en fonction de x et y, on obtient $(x+5,6)\times x = y^2$ qui peut s'écrire, puisque y est un nombre positif, $y = \sqrt{x(x+5,6)}$.

3°) Quelque soit la position du point H, lorsque le botteur est au point T correspondant, la longueur minimum du tir est la longueur BT.
Or $BT^2 = BH^2 + HT^2 = x^2 + y^2$, d'où BT = $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2 + x(x+5,6)} = \sqrt{2x^2+5,6x}$.

Quand H est en D, x = BH = BD = ID – IB = $\frac{1}{2}CD - \frac{1}{2}AB = 35 - 2,8 = 32,2$.

La longueur minimum du tir est donc $\sqrt{2\times 32,2^2 + 5,6\times 32,2}$ soit 47,5 m à 10^{-1} près.

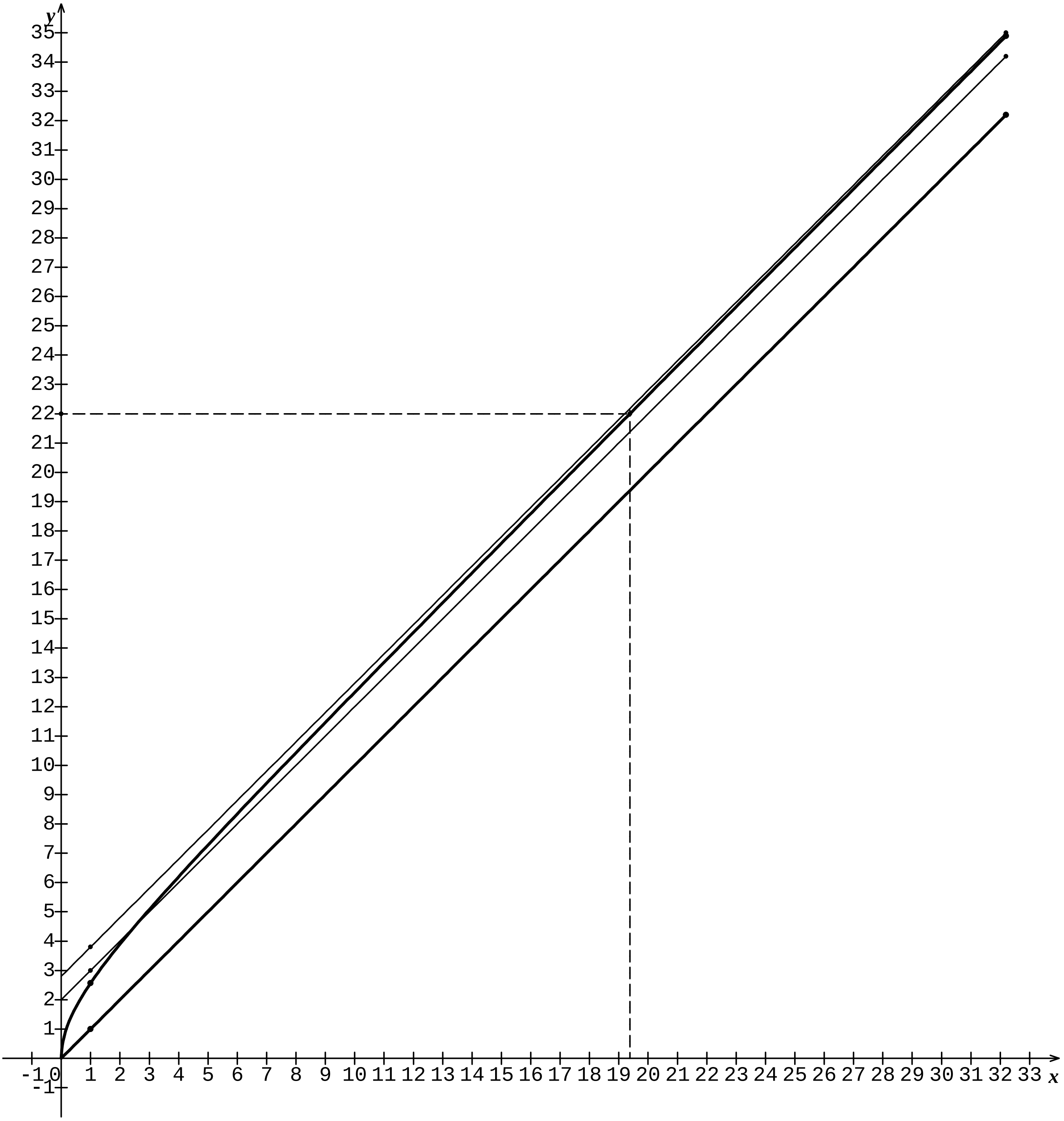
4°) Voir sur la page ci-après le tracé des courbes demandées.

5°) Si le botteur se place sur la ligne des 22 mètres, ceci signifie que la valeur de y dans ce cas est 22.
x vérifie donc, dans ce cas, $\sqrt{x(x+5,6)} = 22$ qui équivaut à $x^2 + 5,6x - 22^2 = 0$.

Cette équation du second degré a pour discriminant δ = 1967,36 et pour solutions x = $\frac{1}{2}\left(-5,6+\sqrt{1967,36}\right)$ et x = $\frac{1}{2}\left(-5,6-\sqrt{1967,36}\right)$.

x étant une longueur, seule la solution positive nous intéresse. On trouve donc x = $\frac{1}{2}\left(-5,6+\sqrt{1967,36}\right)$ soit x ≈ 19,4 m à 10^{-1} près.

Une lecture graphique, sur la courbe de la fonction g, de l'abscisse du point d'ordonnée 22 conduit au même résultat (pointillés sur le dessin), une unité plus grande étant toutefois nécessaire pour une lecture à 10^{-1} près.



On a tracé sur ce dessin, en trait gras, les deux courbes demandées mais aussi, en trait plus fin, les droites d'équations y = x + 2 et y = x + 2,8 qui seront utiles pour la question 6°).

6°) Pour tout x, $x^2+5,6x < x^2+5,6x+2,8^2$, donc $\sqrt{x^2+5,6x} < \sqrt{(x+2,8)^2}$,

d'où g(x) < x + 2,8.

D’autre part, $5,6\,x \geq 4\,x + 4$
si et seulement si $1,6\,x \geq 4$
si et seulement si $x \geq 2,5$.

Donc, lorsque $x \geq 2,5$, $x^2 + 5,6x > x^2 + 4x + 4$, d’où $\sqrt{x^2 + 5,6x} > \sqrt{(x+2)^2}$,
soit $g(x) \geq x + 2$.

On voit donc que, si $x \geq 2,5$, $x + 2 \leq g(x) < x + 2,8$ ce qui signifie que la distance HT est égale à x augmenté d’une longueur comprise entre 2 m et 2,8 m, ce qui est de l’ordre de grandeur de 2 ou 3 pas.

On peut aussi faire la même constatation sur le dessin en traçant les deux droites d’équations $y = x + 2$ et $y = x + 2,8$. La courbe de g, pour tous les points d’abscisse supérieure à 2,5, est comprise entre les deux droites.

Corrigé de l'exercice N°3 (N°2 des séries autres que S)

1°) Si n = 9, n – a qui doit être un carré parfait inférieur à 9 peut être égal à :
- 1, auquel cas n + a est égal à 17 qui n'est pas un carré parfait
- 4, auquel cas n + a est égal à 14 qui n'est pas un carré parfait.

Il n'y a donc pas de solution pour n = 9.
Si n = 16, n – a qui doit être un carré parfait inférieur à 16 peut être égal à :
- 1, auquel cas n + a est égal à 31 qui n'est pas un carré parfait
- 4, auquel cas n + a est égal à 28 qui n'est pas un carré parfait
- 9, auquel cas n + a est égal à 23 qui n'est pas un carré parfait.

Il n'y a donc pas de solution pour n = 16.
Si n = 25, n – a qui doit être un carré parfait inférieur à 25 peut être égal à :
- 1, auquel cas n + a est égal à 49 qui est un carré parfait
- 4, auquel cas n + a est égal à 46 qui n'est pas un carré parfait
- 9, auquel cas n + a est égal à 41 qui n'est pas un carré parfait
- 16, auquel cas n + a est égal à 34 qui n'est pas un carré parfait.

Il existe une solution pour n = 25, c'est le triplet (1 , 25 , 49).

2°) Si $\left(p^2,q^2,r^2\right)$ est un triplet solution, ceci signifie que les différences r^2-q^2 et q^2-p^2 sont égales (c'est le nombre a de la définition d'un triplet solution donnée dans le texte).
Alors $k^2\left(r^2-q^2\right)=k^2\left(q^2-p^2\right)$ donc $k^2r^2-k^2q^2=k^2q^2-k^2p^2$ ou encore $(kr)^2-(kq)^2=(kq)^2-(kp)^2$, ce qui signifie que le triplet $\left((kp)^2,(kq)^2,(kr)^2\right)$ est solution du problème.

3°) On sait que (1 , 25 , 49) est solution donc, d'après la question précédente, on obtient de nouveaux triplets solutions en utilisant différentes valeurs de k :
- avec k = 2, on obtient (4 , 100 , 196)
- avec k = 3, on obtient (9 , 225 , 441)
- avec k = 4, on obtient (16 , 400 , 784).

4°) On cherche un triplet solution tel que n + a = 529 = 23^2.
On cherche donc deux nombres entiers p et q, p < q < 23, tels que n = q^2 et n – a = p^2 vérifiant donc $23^2-q^2=q^2-p^2$, qui équivaut à $q^2=\frac{1}{2}\left(23^2+p^2\right)$.
On peut remarquer que p ne peut être pair. En effet, dans ce cas, p^2 serait pair, 23^2+p^2 serait impair et $\frac{1}{2}\left(23^2+p^2\right)$ ne serait pas un entier.
On peut remarquer aussi que le chiffre des unités de p ne peut être un 5. En effet, dans ce cas, le chiffre des unités de p^2 serait aussi un 5, celui de 23^2+p^2 serait un 4 et celui de $\frac{1}{2}\left(23^2+p^2\right)$ serait un 2 ou un 7. Or aucun carré parfait n'a 2 ou 7 pour chiffre des unités.
Il reste donc 9 possibilités pour p que nous allons envisager l'une après l'autre en regardant dans chaque cas si $\frac{1}{2}\left(23^2+p^2\right)$ est un carré parfait.

p	1	3	7	9	11	13	17	19	21
$\frac{1}{2}\left(23^2+p^2\right)$	265	269	289 $=17^2$	305	325	349	409	445	485

Il existe donc une seule solution pour p = 7 et q = 17. Les nombres n et a sont alors respectivement 289 et 240.
Le triplet solution du problème trouvé est (49 , 289 , 529).

5°) Le triplet $\left(1, q^2, r^2\right)$ est solution du problème si et seulement si r et q sont des entiers tels que $r^2 - q^2 = q^2 - 1$ qui peut s'écrire $r^2 = 2q^2 - 1$ ou encore, puisque r est positif, $r = \sqrt{2q^2 - 1}$.

r^2 est donc un carré parfait à condition que $\sqrt{2q^2 - 1}$ soit un entier.

Il suffit donc d'examiner toutes les valeurs de q, entier tel que $2 \leq q \leq 250$, en regardant dans chaque cas si $\sqrt{2q^2 - 1}$ est un entier.

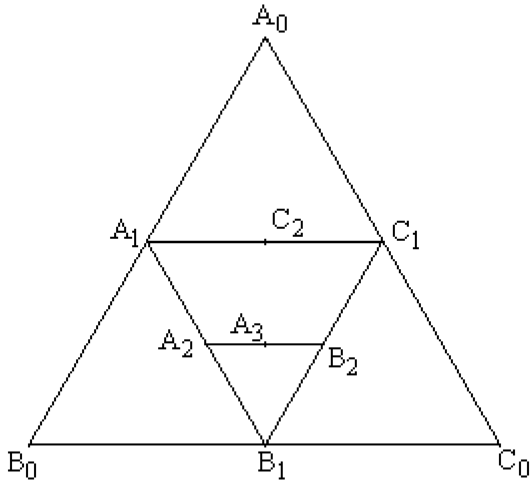
Le programme suivant donne les 3 bonnes réponses en moins d'une minute :

```
For (q,2,250)
√(2q²−1) → r
If int(r) = r
Disp q,r
End
```

Les valeurs affichées sont 5,7 , 29,41 , 169,239.

Les solutions sont donc les triplets (1 , 25 , 49) , (1 , 841 , 1681) et (1 , 28561 , 57121).

Pour les candidats de toutes les séries sauf S
Corrigé de l'exercice N°3



1°) D'après le théorème de la droite des milieux exprimé vectoriellement, comme A_1 est le milieu de $[B_0A_0]$ et B_1 le milieu de $[B_0C_0]$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0C_0}$.

Or C_1 est le milieu de $[A_0C_0]$, d'où $\overrightarrow{A_0C_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0C_0}$.

Donc $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_0C_1}$, ce qui prouve que $A_1B_0C_1A_0$ est un parallélogramme.
Ses diagonales se coupent en leur milieu. Alors C_2 qui est le milieu de $[A_1C_1]$ est aussi le milieu de $[A_0B_1]$ et se trouve donc sur la droite (A_0B_1).
La démonstration précédente prouve aussi (il suffit pour cela de changer le nom des points), par exemple, que A_2 se situe sur (B_0C_1).
Elle prouve aussi, de la même manière, que A_3 se situe sur (B_1C_2). Mais, comme on sait que C_2 est sur (A_0B_1), on en déduit que A_3 est sur (A_0B_1).

2°) Le triangle $A_0B_0C_0$ est équilatéral. Montrons qu'il en est de même pour tout triangle $A_nB_nC_n$.
D'après le théorème de la droite des milieux, $A_1C_1 = \frac{1}{2}B_0C_0$, $A_1B_1 = \frac{1}{2}A_0C_0$ et $B_1C_1 = \frac{1}{2}A_0B_0$.
Comme on sait que $A_0B_0 = B_0C_0 = A_0C_0$, alors $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1$, donc $A_1B_1C_1$ est équilatéral.
Le même procédé de construction se répétant à chaque étape, on en déduit que tous les triangles $A_nB_nC_n$ sont équilatéraux.

D'après ce qu'on vient de voir, les côtés des triangles $A_1B_1C_1$ et $A_0B_0C_0$ sont dans le rapport $\frac{1}{2}$, donc leurs aires sont dans le rapport $\frac{1}{4}$, soit $a_1 = \frac{1}{4}a_0$.

De la même manière, le même procédé de construction se répétant à chaque étape, pour tout n, $a_n = \frac{1}{4}a_{n-1}$, c'est-à-dire que la suite (a_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

$$\text{Or } a_0 = \text{aire}(A_0B_0C_0) = \frac{1}{2}B_0C_0 \times A_0B_1$$
$$= \frac{1}{2}\times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Alors, pour tout n, $a_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}}$.

Or 16384 = $2^{14} = 4^7$.

$\frac{\sqrt{3}}{16384}$ est donc l'aire de $A_nB_nC_n$ pour n + 1 = 7 ; c'est l'aire de $A_6B_6C_6$.

3°) Soit G le centre de gravité de $A_0B_0C_0$.
On sait que $\overrightarrow{A_0G} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A_0B_1}$. Donc $\overrightarrow{B_1G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B_1A_0}$ d'où $\overrightarrow{B_1G} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B_1C_2}$ puisque C_2 est le milieu de $[A_0B_1]$.

Or C_2 est le milieu de $[A_1C_1]$. Donc la dernière égalité vectorielle prouve que G est le centre de gravité de $A_1B_1C_1$.
On en déduit, puisque le même procédé de construction est utilisé à chaque étape, que G est le centre de gravité de tous les triangles $A_nB_nC_n$.

4°) Le rayon du cercle circonscrit au triangle $A_nB_nC_n$ est GA_n et $GA_n = \frac{2}{3}h_n$ où h_n est la hauteur du triangle $A_nB_nC_n$.
Or les côtés des triangles $A_nB_nC_n$ et $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ étant dans le rapport $\frac{1}{2}$, leurs hauteurs sont aussi dans le rapport $\frac{1}{2}$.

On peut donc écrire $h_n = \frac{1}{2}h_{n-1}$, d'où $h_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n h_0$.

Or $h_0 = A_0B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $h_n = \frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}$.

La condition du problème est vérifiée si et seulement si $\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}} < 10^{-3}$ qui équivaut à $2^n > \frac{1}{\sqrt{3}} \times 10^3$.

Or $0,577 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 0,578$ donc $577 < \frac{1}{\sqrt{3}} \times 10^3 < 578$,

et $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$.

Le plus petit entier cherché est donc 10.

Corrigé de l'exercice N°4 (exercice national)

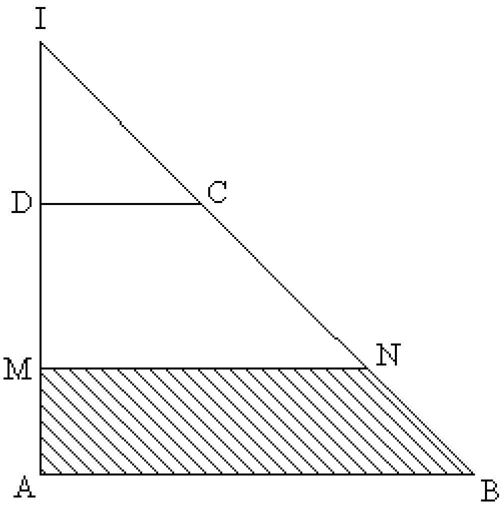
1°) L'égalité $m^2 - p^2 = 8$ peut s'écrire $(m+p)(m-p) = 8$.

m et p devant être des entiers, m + p et m – p doivent aussi être des entiers, m + p étant le plus grand des deux.
La décomposition de 8 en produit de deux facteurs n'est possible que de deux façons : 8 = 8 × 1 et 8 = 4 × 2.

Le système $\begin{cases} m+p=8 \\ m-p=1 \end{cases}$ a pour solution m = $\frac{9}{2}$, p = $\frac{7}{2}$ qui ne convient pas à notre problème.

Le système $\begin{cases} m+p=4 \\ m-p=2 \end{cases}$ a pour solution m = 3, p = 1 qui est donc l'unique réponse à la question posée.

2°)



Posons AB = d, AD = p.
Appelons I le point d'intersection de (AD) et (BC).

L'angle $\widehat{ABC}$ ayant pour mesure 45°, les triangles IAB, IMN et IDC sont tous isocèles rectangles.

Donc IA = AB = d et aire(IAB) = $\frac{1}{2}d^2$.

On sait aussi MN = IM = IA – AM = d – 2

d'où aire(IMN) = $\frac{1}{2}(d-2)^2$.

De même ID = DC = p

d'où aire(IDC) = $\frac{1}{2}p^2$.

Alors aire(MNBA) = aire(IAB) – aire(IMN) = $\frac{1}{2}d^2 - \frac{1}{2}(d-2)^2$

et aire(MNCD) = aire(IMN) – aire(ICD) = $\frac{1}{2}(d-2)^2 - \frac{1}{2}p^2$.

La condition aire(MNBA) = aire(MNCD) s'écrit donc $\frac{1}{2}d^2 - \frac{1}{2}(d-2)^2 = \frac{1}{2}(d-2)^2 - \frac{1}{2}p^2$

qui équivaut à $d^2 - (d-2)^2 = (d-2)^2 - p^2$

ou encore à $4d - 4 = \left(d^2 - 4d + 4\right) - p^2$

ou bien $d^2 - 8d + 8 - p^2 = 0$

qu'on peut écrire $d^2 - 8d + 16 - 8 - p^2 = 0$

soit encore $(d-4)^2 - p^2 = 8$

soit enfin $m^2 - p^2 = 8$ en posant m = d – 4.

D'après le 1°), on obtient alors m = 3 et p = 1, soit d – 4 = 3 et p = 1, d'où d = 7 et p = 1.
On a donc AB = 7 et DC = 1.
Dans ce cas, IA = 7 et ID = 1, et on trouve AD = 6.