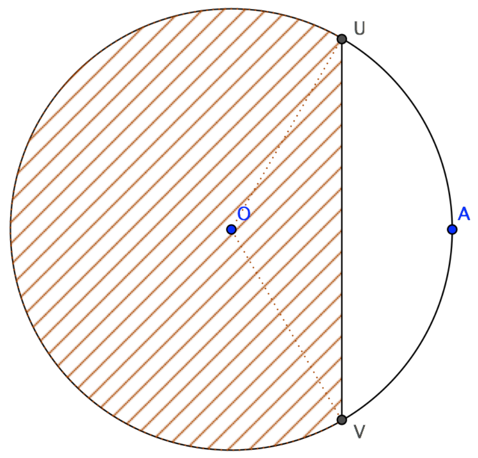
Plus proche …

Partie I

1) et 2)
On représente le segment [UV] intersection avec le disque de la médiatrice du segment [OA].
On hachure … noter que les points du segment [UV] ne sont pas dans l'ensemble hachuré.

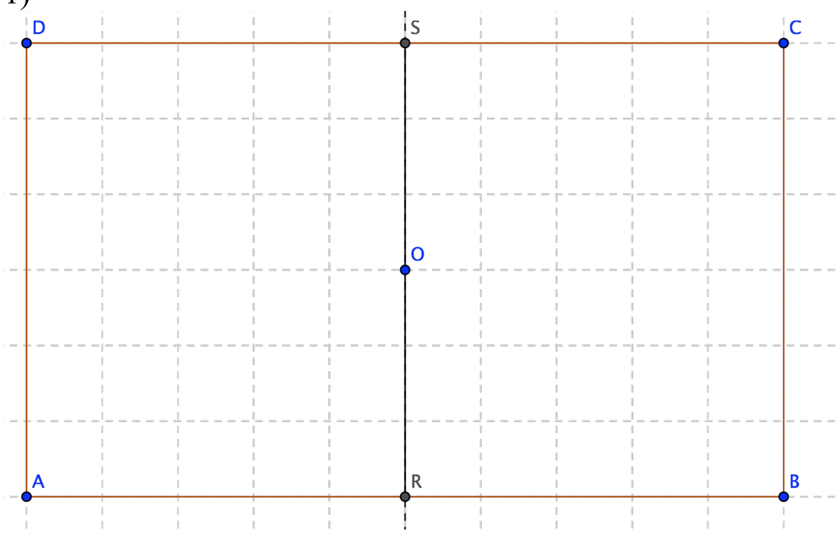


3) Quel est le rapport de l'aire hachurée à celle du disque ?
L'aire du disque (de rayon R) : πR^2 (l'aire d'un secteur d'angle de mesure 360°).
Le secteur angulaire UOV a pour aire le tiers de la précédente.
L'aire de la portion hachurée est la somme des deux tiers de l'aire du disque et de l'aire du triangle OUV ; soit : $\frac{2}{3}\pi R^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}R^2$.

La probabilité : $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{\pi}$; 80,5 % environ.

Partie II

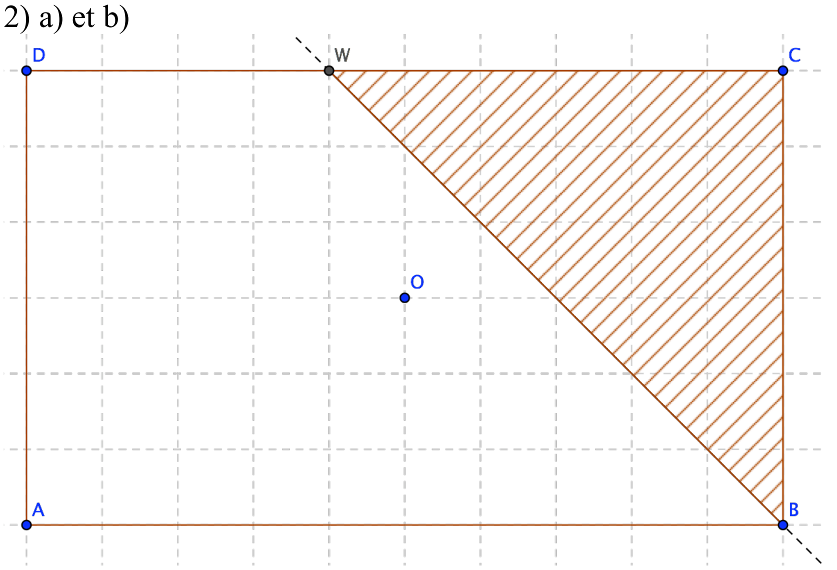
1)



La médiatrice du segment [AB] coupe le segment [AB] en R et le segment [CD] en S . Le segment [RS] représente l'ensemble des points du rectangle équidistants du côté [BC] et du côté [AD].
Le rectangle RBCS est l'ensemble des points plus proches du côté [BC] que du côté [AD].
Son aire est la moitié de celle du rectangle.

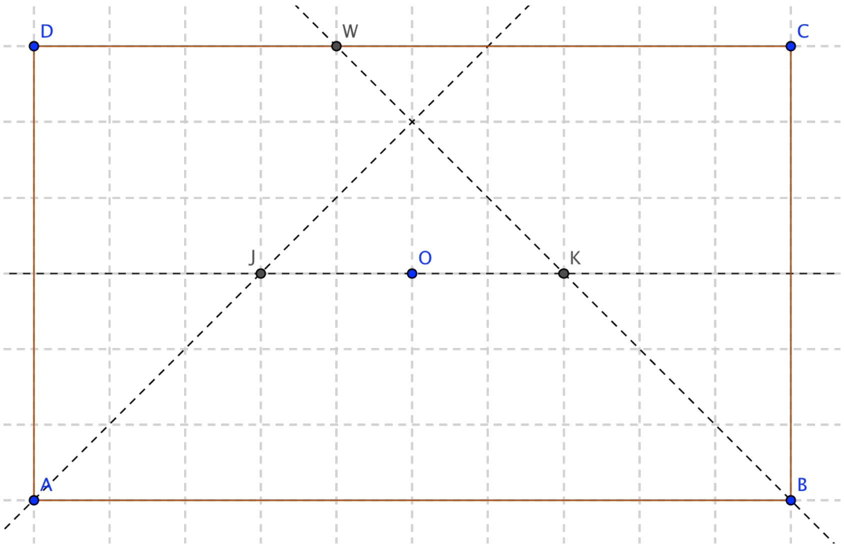
Probabilité : $\frac{1}{2}$; 50 %.

2) a) et b)



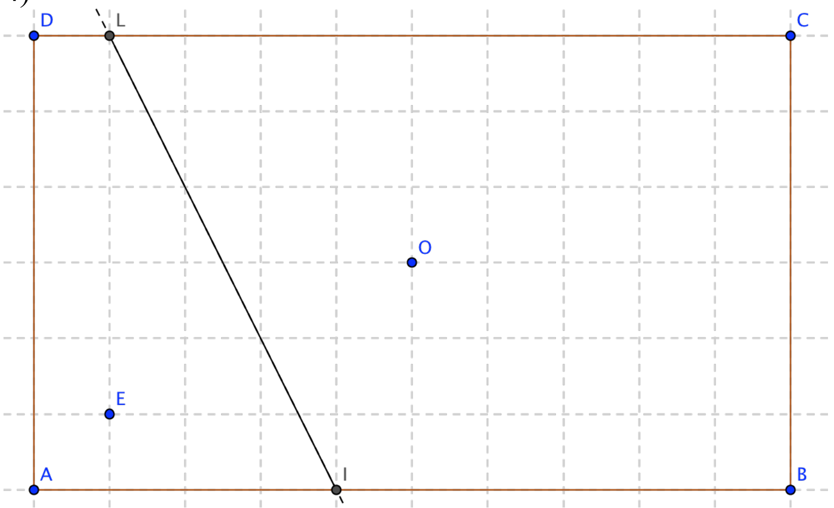
La bissectrice de l'angle droit en B coupe le segment [CD] en W. Le segment [BW] représente l'ensemble des points du rectangle équidistants du côté [BC] et du côté [AB].
Le triangle BCW (excepté le segment [BW]) est l'ensemble des points plus proches du côté [BC] que du côté [AB].
Son aire : 72 cm^2.
Le rapport de celle-ci à celle du rectangle : $\frac{3}{10}$; 30 %.

3)



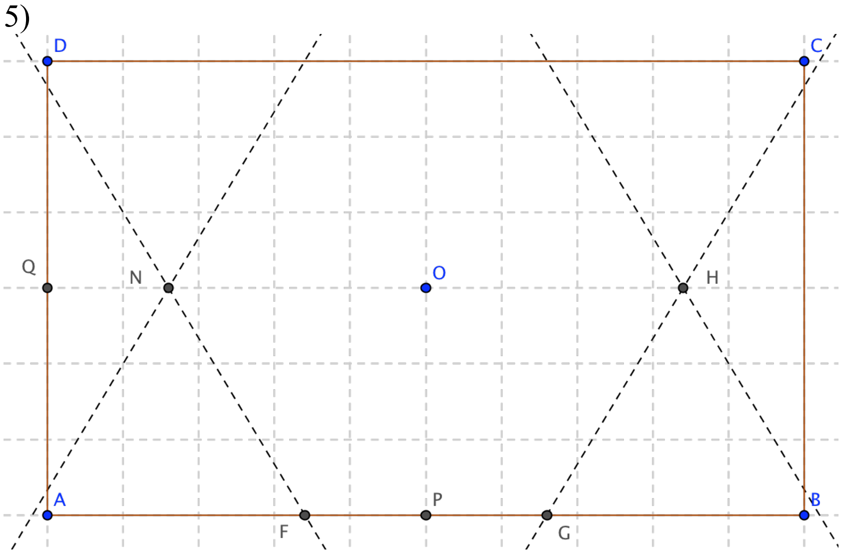
Les bissectrices de l'angle droit en B, de l'angle droit en A, la médiatrice du segment [BC] déterminent le quadrilatère ABKJ qui est l'ensemble des points plus proches du côté [AB] que des trois autres côtés du rectangle (exception faite des côtés [BK], [KJ], [JA].
Son aire : 84 cm^2.
Probabilité : $\dfrac{7}{20}$; 35 %.

4)



La médiatrice du segment [OE] détermine les points I et L respectivement sur les côtés [AB] et [CD].
Il semble que la longueur AI vaille 8 ; un triangle rectangle (6 sur 2) extrait du quadrillage sur l'hypoténuse EI ainsi que de même sur OI confirme que le point de [AB] à cette distance de A est équidistant de O et de E.
De même DL = 2.
L'aire du trapèze AILD (ensemble des points plus proches de E que de O (exception faite du segment [IL]) vaut : 60 cm^2.
La probabilité : $\dfrac{3}{4}$; 75 %.

5)



On considère les médiatrices des segments [OA], [OB], [OC] et [OD] qui déterminent un hexagone ensemble des points plus proches de O que des sommets A, B, C, D.
La médiatrice du segment [AO] détermine le point F sur le segment [AB].
Les médiatrices des segments [AO] et [OD] déterminent le point N … situé aussi sur l'axe médian du rectangle (par symétrie du rectangle appliquée aux segments générant les médiatrices …).
Le quadrilatère AFON dont les diagonales ont pour milieu le pied de la médiatrice est un parallélogramme (c'est un losange).
Ce losange a même centre de symétrie que le rectangle APOQ (P et Q milieux respectifs de [AB] et [AD]).
Dans cette symétrie centrale : PFNO et NQAF se correspondent.
L'hexagone, portion du rectangle ensemble des points plus proches de O que des sommets A, B, C, D, a pour aire la moitié de celle du rectangle ABCD.
Probabilité : $\dfrac{1}{2}$; 50 %. Ce résultat est indépendant de la longueur des côtés du rectangle.

Digisibles

1) Essayer chiffre des dizaines, chiffre des unités :
12 ; 15 ou encore 24 ou bien 36 …

2) L'idée est d'utiliser le 1 comme chiffre des milliers. 1000 étant divisible par 2, 4, 8 … on cherche à partir des trois chiffres 2, 4, 8 ; 1248 est divisible par 8 (donc 4 ainsi que 2) convient.

3) a) Le nombre est divisible par 5, son chiffre des unités et 0 ou 5 ; seul 5 est possible.
b) Avec 5 comme chiffre des unités, le nombre est impair, il n'a donc que des diviseur impairs ; tels sont les chiffres de son écriture décimale.
c) Les cinq chiffres impairs peuvent-ils figurer dans l'écriture du nombre ? Si oui, celui-ci s'écrit xyzt5 (x, y, z, t étant des chiffres impairs. Cela fait vingt-quatre nombre éventuels ; la somme des chiffres valant 25, aucun n'est divisible par 3.
c) Le nombre s'écrit xyz5 (x, y, z étant des chiffres impairs. On cherche le plus grand possible … essayer x = 9 etc … Le plus grand nombre qui puisse être écrit, 9735 ne convient pas ; puis 9715 non plus ; 9375 pas plus ; 9315 est digisible. C'est le plus grand s'écrivant avec un 5.

4) La somme des neuf chiffres vaut 45.
a) S'il y a le 5, l'écriture du nombre ne comporte pas plus de quatre chiffres.
S'il n'y a pas le 5, avec huit chiffres, la somme des chiffres vaut 40 ; il est impossible que le nombre soit divisible par 3.
b) Le nombre s'écrit avec sept chiffres, il n'y a donc pas le 5. Il y a le 9.
Les huit chiffres éventuels ont une somme valant 40. Quel chiffre ôter pour que cette somme soit un multiple de 9 ? Il s'agit du chiffre 4.
Un nombre digisible s'écrivant avec sept chiffres dont le 9, comporte exclusivement les chiffres 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9.
c) Pour la recherche du plus grand digisible, on tente avec le 9 … comme chiffre des centaines de mille …
Le plus grand nombre qui puisse être écrit, 9876321, n'est pas pair ; puis le plus grand, 9876312, n'est pas divisible par 7 ; puis 9867312 est divisible par 1, 2, 3, 7, 8, 9. C'est le plus grand nombre digisible.

Exercice 3

1. **a)** $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$, $x_4 = 16$, $x_5 = 25$ et $x_6 = 36$.

b) Conjecture : pour tout entier $n \geq 1$, $x_n = n^2$.

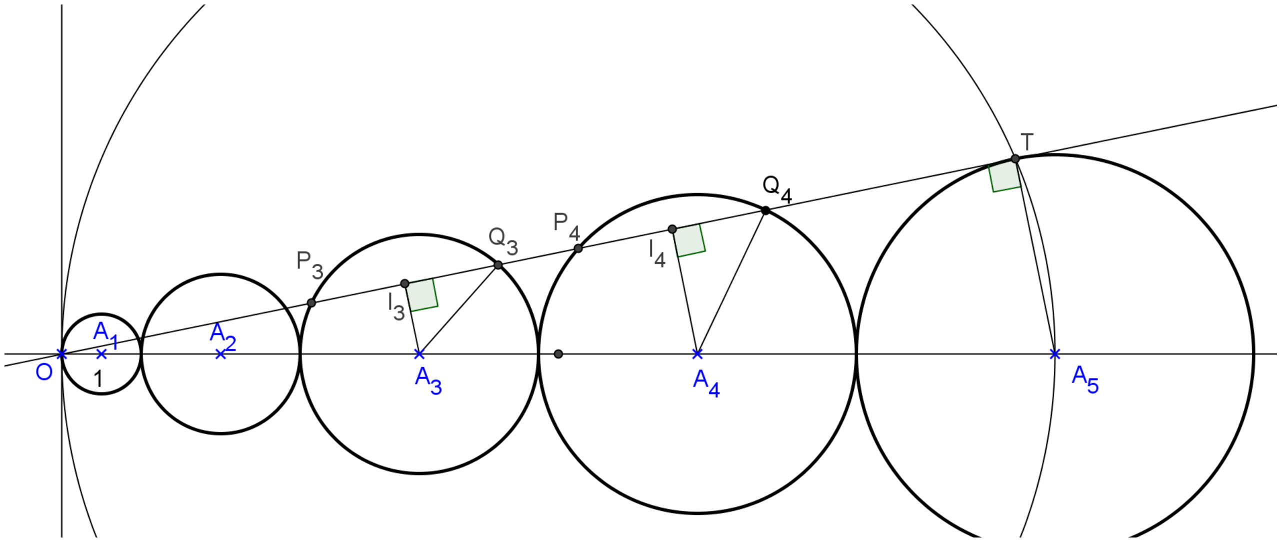
c) La relation est vérifiée pour $n = 1$. Démonstration dans le cas $n \geq 2$:

Si on désigne par r_n le rayon du cercle C_n, on a $x_n = OA_n = 2r_1 + 2r_2 + \ldots + 2r_{n-1} + r_n$.

d'où $x_n = 2(r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}) + r_n = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)) + n$

D'après la formule rappelée au début de l'énoncé : $x_n = (n-1)n + n = n^2$.

2. **a)** Le triangle OTA_5 étant rectangle en T, le point T appartient au cercle de diamètre $[OA_5]$. Il est donc le point d'intersection autre que O de ce cercle et de la droite Δ.



b) Les droites (I_3A_3), (I_4A_4) et (TA_5) sont parallèles puisque toutes trois perpendiculaires à la droite Δ. On peut donc appliquer le théorème de Thalès dans les triangles OTA_5, OI_3A_3 et OI_4A_4.

On obtient : $\frac{I_3A_3}{OA_3} = \frac{I_4A_4}{OA_4} = \frac{TA_5}{OA_5}$. D'où $I_3A_3 = OA_3 \times \frac{TA_5}{OA_5}$ et $I_4A_4 = OA_4 \times \frac{TA_5}{OA_5}$, ce qui donne :

$I_3A_3 = 9 \times \frac{5}{25} = \frac{9}{5}$ et $I_4A_4 = 16 \times \frac{5}{25} = \frac{16}{5}$.

On applique alors le théorème de Pythagore dans les triangles $A_3I_3Q_3$ et $A_4I_4Q_4$.

$I_3Q_3{}^2 = A_3Q_3{}^2 - I_3A_3{}^2 = 3^2 - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{144}{25}$ et $I_4Q_4{}^2 = A_4Q_4{}^2 - I_4A_4{}^2 = 4^2 - \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{144}{25}$.

On obtient $P_3Q_3 = P_4Q_4 = \frac{24}{5}$. Les deux cordes $[P_3Q_3]$ et $[P_4Q_4]$ ont la même longueur.

3. **a)** De même qu'au **2. b)**, on applique le théorème de Thalès dans les triangles OTA_n et OI_kA_k.

On obtient : $\frac{I_kA_k}{OA_k} = \frac{TA_n}{OA_n}$. D'où $I_kA_k = OA_k \times \frac{TA_n}{OA_n} = k^2 \times \frac{n}{n^2} = \frac{k^2}{n}$.

Puis on applique le théorème de Pythagore dans le triangle $A_kI_kQ_k$.

$I_kQ_k{}^2 = A_kQ_k{}^2 - I_kA_k{}^2 = k^2 - \left(\frac{k^2}{n}\right)^2 = \frac{k^2(n^2-k^2)}{n^2}$. D'où $P_kQ_k = 2\,I_kQ_k = \frac{2k}{n}\sqrt{n^2-k^2}$.

b) Soit k et k' des entiers distincts tels que $1 \leq k \leq n-1$ et $1 \leq k' \leq n-1$.

On a les équivalences successives suivantes :

$$P_kQ_k = P_{k'}Q_{k'} \Leftrightarrow \frac{k}{n}\sqrt{n^2-k^2} = \frac{k'}{n}\sqrt{n^2-k'^2} \Leftrightarrow k^2\left(n^2-k^2\right) = k'^2\left(n^2-k'^2\right)$$

$$\Leftrightarrow n^2\left(k^2-k'^2\right) = k^4 - k'^4 \Leftrightarrow n^2\left(k^2-k'^2\right) = \left(k^2+k'^2\right)\left(k^2-k'^2\right),$$

ce qui équivaut, puisque $(k^2 - k'^2)$ est non nul, à $n^2 = k^2 + k'^2$.

c) Pour $n = 6$, on ne peut trouver deux cordes égales car aucune des sommes $k^2 + k'^2$ ne vaut 36.

d) Pour $n = 10$, on a $10^2 = 6^2 + 8^2$. On en déduit que les cordes $[P_6Q_6]$ et $[P_8Q_8]$ délimitées par la droite Δ sur les cercles C_6 et C_8 ont la même longueur.

Exercice 4

1. **a)** Notons x le nombre de wagons de type A et y celui de type B : on a donc $20x + 30y = 320$. La masse totale $M = 60x + 100y = 960 + 10y$ est maximum lorsque y est maximum. On sait que $2x + 3y = 32$ donc $0 \leq y \leq 10$. Donc ($x = 1, y = 10, N = 11, M = 1960$) est la seule solution du problème
avec $20x + 30y = 320$, La masse totale $M = 60x + 100y = 930 + 10y$ est maximum lorsque y est maximum. On sait que $2x + 3y = 31$ donc $0 \leq y \leq 10$. Donc ($x = 2, y = 9, N = 11, M = 1830$) est la seule solution du problème

b) avec $20x + 30y = 320$, il faut choisir la position du wagon de type A parmi les 11 wagons ,soit 11 compositions possibles.
avec $20x + 30y = 310$, il faut choisir la position de deux wagons de type A parmi les 11 wagons, soit $10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=55$ compositions possibles.

2.

a) Pour former un convoi de longueur 100 il faut avec les notations précédentes résoudre l'équation $2x + 3y = 10$, x et y entiers donc $x = 2$ $y = 2$ ou $x = 5$. Il y a donc 7 convois de longueur 10 possibles (A,A,B,B),(A,B,A,B),(A,B,B,A),(B,A,A,B),(B,A,B,A),(B,B,A,A),(A,A,A,A,A)

b)

n	2	3	4	5	6	7
u_n	1	1	1	2	2	3

c) Si le convoi de longueur 80 se termine par un wagon A , et si on retire ce wagon il restera un convoi de longueur 60. Inversement, tous les convois de longueur 60 complétés d'un wagon de type A conviennent. Si le convoi de longueur 80 se termine soit par un wagon B , et si on retire ce wagon il restera un convoi de longueur 50. Inversement, tous les convois de longueur 50 complétés d'un wagon de type B conviennent. On a donc $u_8 = u_6 + u_5 = 4$

d) De la même façon, $u_9 = u_7 + u_6 = 5$, $u_{10} = u_8 + u_7 = 7$
on a donc $u_n = u_{n-2} + u_{n-3}$

n	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
u_n	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65	86	114

3. Donner l'entier n
a = 1, b = 1, c = 1
Pour k allant de 5 à n faire
    d reçoit a + b
    a reçoit b, b reçoit c, c reçoit d
    fin faire
afficher c