Olympiades de mathématiques

Session 2010

Académie d'Orléans-Tours

Mercredi 10 mars 2010 14 h- 18 h

Les exercices 1 et 2 sont issus de la sélection du jury national.
Les exercices 3 et 4 sont issus de la sélection du jury académique.
Les 4 exercices sont à traiter par le candidat.

Conformément à la réglementation, l'usage d'une calculatrice est autorisée.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

<u>Exercice National 1 :</u> ***A la recherche du « chaînonze ».***

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :
« Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11».
Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car 7 + 9 – 5 = 11 et 0 + 9 – 9 = 0.

On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.
Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1. Quel chiffre peut-on ajouter **à droite** de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?

2. Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres.
   Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^{e} chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

3. Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de *n* chiffres se répétant indéfiniment.

4. On considère la chaîne « *a b* » où *a* et *b* sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de **trois** chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.

   a. Etudier le cas particulier « *a a* ».

   b. Etudier le cas $b = a - 1$.

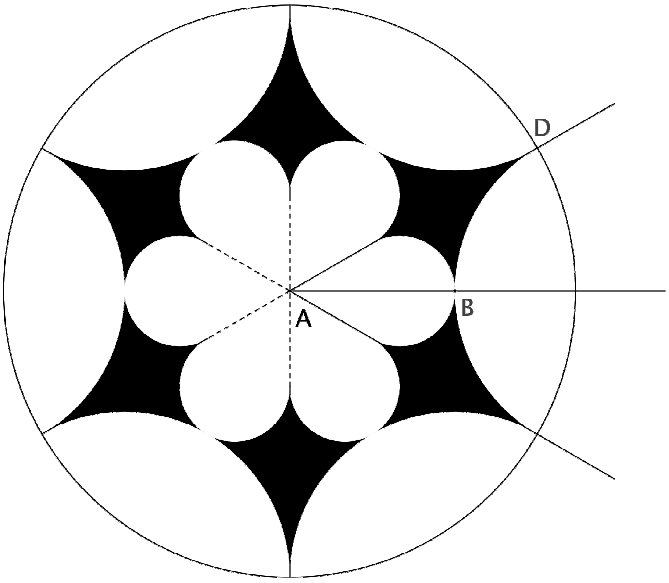
   c. Etudier les autres cas.

5. Montrer qu'en prolongeant la chaîne « *a b* » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

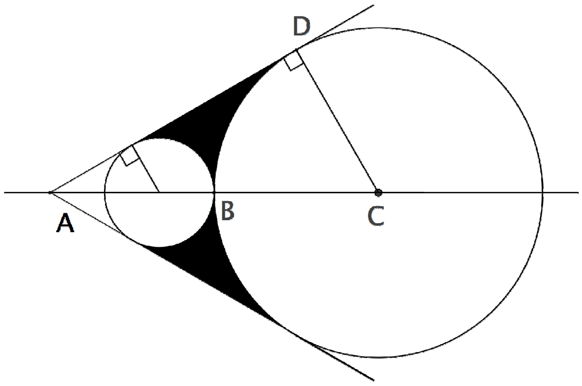
<u>Exercice National 2 :</u> ***La Rosace***

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

Rosace



Motif :



1. Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?

2. *a*. Montrer que $AB = BC$.

   b. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?

   c. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$.

   Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

<u>Exercice académique 3 :</u> ***Des points à l'intérieur d'un triangle***

ABC est un triangle équilatéral dont le côté a pour longueur $8\sqrt{3}$ cm.
On fera une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

Le point H est le pied de la hauteur issue du point A.
Pour tout point M intérieur au triangle ABC, on considère les points P, Q et R définis comme suit :

- la droite passant par le point M et perpendiculaire au segment [BC] coupe ce segment en P ;
- la droite passant par le point M et perpendiculaire au segment [CA] coupe ce segment en Q ;
- la droite passant par le point M et perpendiculaire au segment [AB] coupe ce segment en R.

Partie I. Une longueur remarquable

1. Calculer la longueur AH.
2. Démontrer que $\mathrm{MP}+\mathrm{MQ}+\mathrm{MR}=\mathrm{AH}$. Pour cela, on pourra considérer les aires des triangles AMB, BMC et CMA.

Partie II. Un problème d'aire

À tout point M intérieur au triangle ABC, on associe un triplet $(x\,;y\,;z)$ de nombres appelés « coordonnées triangulaires du point M » et définis de la manière suivante :

$$x=\mathrm{MP}, \qquad y=\mathrm{MQ}, \qquad z=\mathrm{MR},$$

où MP, MQ et MR représentent les mesures, exprimées en cm, des longueurs respectives des segments [MP], [MQ] et [MR].

On s'intéresse aux points M dont les trois « coordonnées triangulaires » sont des nombres entiers et tels que l'aire du quadrilatère ARMQ soit égale au tiers de l'aire du triangle ABC.

1. Démontrer que le point G, centre de gravité du triangle ABC, vérifie les deux conditions précédentes.

2. Dans cette question, M est un point quelconque intérieur au triangle ABC.
   Calculer l'aire du quadrilatère ARMQ en fonction des coordonnées triangulaires *x*, *y* et *z* du point M.
   Démontrer alors que cette aire est donnée par $\frac{\sqrt{3}}{6}\left(y^2+4yz+z^2\right)$.
3. Existe-t-il des points M, intérieurs au triangle ABC, autres que le point G, dont les « coordonnées triangulaires » sont des nombres entiers et tels que l'aire du quadrilatère ARMQ soit égale au tiers de l'aire du triangle ABC ?

<u>Exercice académique 4 :</u> ***Des entiers consécutifs***

Les entiers 3, 4 et 5 sont dits consécutifs car 4=3+1 et 5=4+1, autrement dit, on passe de l'un à l'autre en ajoutant 1.

1°) On remarque que : $3^2+4^2=5^2$.
Existe-t-il trois autres entiers positifs consécutifs tels que la somme des carrés des deux premiers soit égale au carré du troisième ?

2°)

a) Trouver quatre entiers positifs consécutifs tels que la somme des cubes des trois premiers soit égale au cube du quatrième.

b) Le problème a-t-il d'autres solutions ? Pour répondre à cette question, on pourra s'aider de l'étude de la fonction *f* définie par $f(x)=x^3+(x+1)^3+(x+2)^3-(x+3)^3$.

3°) On se propose de démontrer que l'on ne peut pas trouver cinq entiers positifs consécutifs *a*, *b*, *c*, *d* et *e* tels que :
$a^4+b^4+c^4+d^4=e^4$.

a) On suppose que *a* est un entier impair. En recourant à des propriétés de parité, montrer que l'on ne peut pas avoir l'égalité $a^4+(a+1)^4+(a+2)^4+(a+3)^4=(a+4)^4$.

b) On suppose que *a* est un entier pair. Démontrer que, dans ce cas également, on ne peut pas avoir l'égalité $a^4+(a+1)^4+(a+2)^4+(a+3)^4=(a+4)^4$. Pour cela, on pourra s'intéresser au chiffre des unités de l'écriture décimale de l'entier *a*.