Johannes Kepler

Éléments de biographie à compléter :

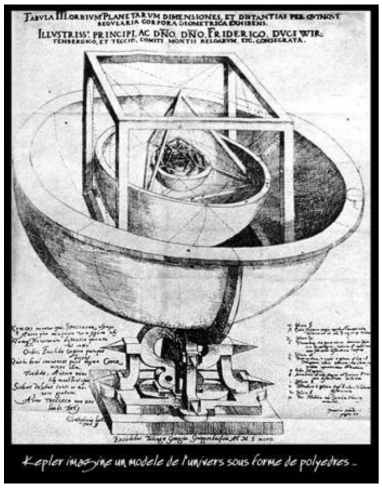
Johannes Kepler est né le 27 décembre 1571 à Weil der Stadt dans le Bade-Wurtemberg et est mort le 15 novembre 1630 à Ratisbonne en Bavière.

En 1584, il entra au séminaire protestant d'Adelberg.

Plus tard son professeur de mathématiques à l'université de Tübingen fut Michael Maestlin (1580-1635). Son maître lui enseigna la théorie héliocentrique. Passionné d'astronomie, il étudia et confirma les idées héliocentriques avancées par Copernic, s'opposant au *géocentrisme* de Ptolémée.

Les successeurs du pape Paul V renonceront à poursuivre les idées héliocentriques.

En 1594, Kepler enseigna les mathématiques à Graz (Autriche) alors qu'il se destinait à devenir pasteur luthérien. Poursuivi tant pour ses idées que pour sa religion (protestante), il se réfugia (1600) à Prague, invité par l'astronome danois Tycho Brahé (1546-1601) où il poursuivit ses recherches.


Kepler imagine un modèle de l'univers sous forme de polyèdres.

En 1596, il publie *Mysterium Cosmographicum*. De 1600 à 1618, Kepler travailla à ses trois grands ouvrages : l'*Astronomia nova* (1609), l'*Harmonia mundi* (1619) et l'*Epitome Astronomiae Copernicanae* (1618-1621) dans lesquels il formula notamment ses trois célèbres lois assignant une trajectoire elliptique aux planètes, rompant ainsi avec la tradition millénaire du mouvement circulaire. Il imagina un modèle de l'univers sous forme de polyèdres emboîtés et de leurs sphères circonscrites.

En 1615, pour remédier aux erreurs fréquentes des ventes, il publie un ouvrage sur le calcul approché des volumes des tonneaux de vin grâce à une méthode inspirée d'Archimède.

Les lois de Kepler : les deux premières datent de 1609 et la troisième de 1618.

- La première de ces lois (*la loi des orbites*) exprime que les planètes décrivent une orbite elliptique dont un des foyers est le soleil.

- La deuxième (*la loi des aires*) dit que les aires balayées par le rayon reliant le Soleil à une planète pendant des durées égales sont égales.

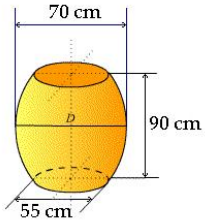
- La troisième : (*la loi des périodes*) exprime que le carré du temps de révolution sidérale d'une planète est proportionnel au cube du demi-grand axe de sa trajectoire elliptique.

En 1610, Kepler étudia certaines formes géométriques de la nature comme les flocons de neige et les nids d'abeille et en vint à se demander comment empiler des sphères afin que le volume occupé soit le plus petit possible.

Tournez la page SVP ☞

Travail mathématique :

Travail n°1 : Kepler et le volume des tonneaux :



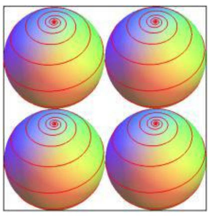
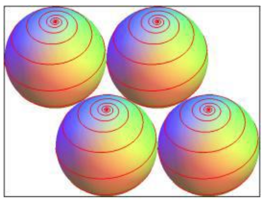
1. Avec les moyens de la géométrie élémentaire, donner un encadrement, en litres (L), du volume du tonneau ci-dessus. (Rappel : 1 Litre équivaut à 1 dm^3).
   On encadre le volume du tonneau par le volume de deux cylindres de hauteur 90 cm, et dont le diamètre des bases sont respectivement 55cm et 70cm.
   $$\pi \times \left(\frac{55}{2}\right)^2 \times 90 < \mathscr{V}_{tonneau} < \pi \times \left(\frac{70}{2}\right)^2 \times 90$$
   $$213\ 824 \text{ cm}^3 < \mathscr{V}_{tonneau} < 346\ 361 \text{ cm}^3$$
   $$213 \text{ L} < \mathscr{V}_{tonneau} < 347 \text{ L}.$$

2. Johannes Kepler a établi la formule (approchée) suivante pour évaluer le volume d'un tonneau :
   On appelle :
   - $\mathscr{A}_1$ l'aire de la base inférieure ;
   - $\mathscr{A}_m$ l'aire de la base moyenne ;
   - $\mathscr{H}$ la hauteur.

   (La base moyenne est située à mi-hauteur du tonneau)
   $$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\left(\mathscr{A}_1 + 2\mathscr{A}_m\right) \times \mathscr{H}$$
   Calculer le volume du tonneau ci-contre avec cette méthode.
   $$\mathscr{V}_{tonneau} = \frac{1}{3} \times \left(\pi \times \left(\frac{55}{2}\right)^2 + 2 \times \pi \times \left(\frac{70}{2}\right)^2\right) \times 90$$
   Ainsi, $\mathscr{V}_{tonneau} \approx 302\ 182 \text{ cm}^3$,
   ou encore $\mathscr{V}_{tonneau} \approx 300$ L.

Travail n°2 : Kepler et les oranges :

Quatre oranges de même rayon R sont placées dans une boîte parallélépipédique, la plus petite possible. Voici deux dispositions possibles des oranges (empilements élémentaires sur une seule couche) :

Disposition n°1 *vue de dessus*	Disposition n°2 *vue de dessus*
	
Boîte à base carrée et de hauteur $2R$	Boîte de hauteur $2R$ et de base un rectangle de dimensions L et ℓ.

On appelle **densité d d'un empilement** le rapport entre le volume occupé par le contenu (donc ici le volume des 4 oranges (sphères de rayon R)) et celui du contenant (la boîte).

Après avoir calculé les dimensions ℓ et L de la disposition 2 et chacune des densités, vous pourrez répondre à la question que se posait Kepler : Quel est celui des deux empilements qui a la plus forte densité ?

On rappelle que le volume d'une boule de rayon R est $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

- **Disposition n°1** $D_1 = \dfrac{4 \times \frac{4}{3} \times \pi \times R^3}{4R \times 4R \times 2R} = \dfrac{\pi}{6} \approx 0,52.$

- **Disposition n°2** Pour des raisons évidentes de symétrie, la longueur L de la boite est $5R$.
  On calcule la largeur ℓ de la boite : On considère le triangle formé par les centres des 3 oranges (les deux du haut et celle qui est dessous). Ce triangle est un triangle équilatéral. Sa hauteur, en fonction de R, est $R\sqrt{3}$. Donc la largeur de la boite est $\ell = R\sqrt{3} + 2R = (\sqrt{3}+2)R$.
  $$D_2 = \frac{4 \times \frac{4}{3} \times \pi \times R^3}{5R \times (\sqrt{3}+2)R \times 2R} = \frac{8\pi}{15(\sqrt{3}+2)} \approx 0,45.$$

Donc l'empilement qui a la plus forte densité est l'empilement 1.

Cette feuille est à rendre complétée avec vos autres feuilles réponses