2003

Épreuve Officielle

Solutions

Exercice n° 1 :

Histoire d'appartements

Soit a le nombre de personnes ayant vue sur le port, b le nombre de personnes ayant vue sur la ville, c le nombre de personnes ayant vue sur la montagne et d le nombre de personnes ayant vue sur la mer.

b est multiple de 3 et 4 et b £ 20 donc b = 12, a = 4, c = 8 et d = 3.

<table>
<tr><td rowspan="5">montagne</td><td colspan="3">mer</td><td rowspan="5">port</td><td rowspan="5">x + y + z = 3 donc x = 1, y = 1 et z = 1.
1 + t + u = 4 donc t + u = 3
soit t = 1 et u = 2 ou t = 2 et u = 1</td></tr>
<tr><td>x</td><td>y</td><td>z</td></tr>
<tr><td>s</td><td></td><td>t</td></tr>
<tr><td>w</td><td>v</td><td>u</td></tr>
<tr><td colspan="3">ville</td></tr>
</table>

<u>Si t = 1 et u = 2</u>, alors w + v +2 = 12 d'où w + v = 10 et 1 + s + w = 8 d'où s + w = 7, de plus,

x + y + z + t + u + v + w + s = 20 donc s + 16 = 20 **s = 4** alors **w = 3** et **v =7**.

<u>Si t = 2 et u = 1</u>, alors w + v +1 = 12 d'où w + v = 11 et 1 + s + w = 8 d'où s + w = 7, de plus,

x + y + z + t + u + v + w + s = 20 donc s + 17 = 20 **s = 3** alors **w = 4** et **v =7.**

<u>Deux dispositions possibles</u> :

1	**1**	**1**
4		**1**
3	**7**	**2**

1	**1**	**1**
3		**2**
4	**7**	**1**

Exercice n° 2 :

Fractions bicarrées

On cherche une fraction du type $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers positifs non nuls et $11 \le \frac{p^2}{q^2} \le 12$

Alors $11q^2 \le p^2 \le 12q^2$

Si q = 1, $11 \le p^2 \le 12$ impossible (pas de carré parfait entre 11 et 12)

Si q = 2, $44 \le p^2 \le 48$ impossible (pas de carré parfait entre 44 et 48)

Si q = 3, $99 \le p^2 \le 108$ $p^2 = 100$, p = 10 est le seul carré parfait compris entre 99 et 108.

Conclusion : La fraction cherchée est $\frac{10}{3}$.

Exercice n° 3 :

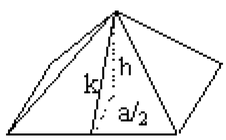
Ni creux ni plein.

1) Soit h la hauteur d'une pyramide.

Le volume des pyramides enlevées doit être égal à la moitié du volume du cube :

$6\times(\frac{1}{3})\times a^2\times h=(\frac{1}{2})\times a^3$ soit $2a^2h=(\frac{1}{2})a^3$ soit $h=\frac{1}{4}$

2) Calculons, dans une des pyramides, la hauteur d'une face triangulaire :



Cette hauteur k est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un côté est la hauteur de la pyramide et l'autre un demi côté d'une face du cube d'où :

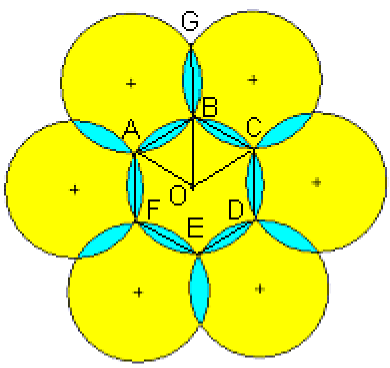
$k^2 = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{4})^2 = \frac{5a^2}{16}$ soit $k = a\frac{\sqrt{5}}{4}$

L'aire d'une face triangulaire est donc : $\frac{1}{2}\, a \times a\frac{\sqrt{5}}{4} = a^2\frac{\sqrt{5}}{8}$; L'aire totale du jouet est $3a^2\sqrt{5}$.

L'aire totale du cube était de $6a^2$; le rapport de ces deux aires est donc $\boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}}$.

Exercice n° 4 :

Nappe en corolle



ABCDEF est un hexagone régulier donc AB = AO = 30

Donc BG = 30 et OG = 60 car les points O, B et G sont alignés.

Le rayon de la plus grande table ronde que l'on puisse couvrir entièrement avec cette nappe est de 60 cm.

Exercice n° 5 :

Le code de Hamming

1)Les codes C(1) à C(9) sont :

C(0) = 0000 ; C(1) = 0111 ; C(2) = 0222 ; C(3) = 0333 ; C(4) = 0444 ; C(5) = 0555 ; C(6) = 0666 ; C(7) = 0777 ; C(8) = 0888 ; C(9) = 0999.

2)C(10) = 1012 ; C(12) = 1230.

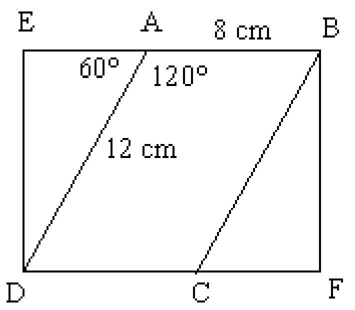
3)De proche en proche, on obtient : C(13) = 1321 ; C(14) = 1456 ; C(15) = 1547 ; C(16) = 1674 ; C(17) = 1765.

4)C(35) = 4159 et C(36) = 4284.

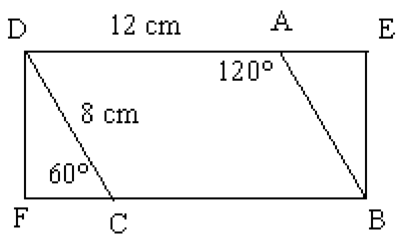
Exercice n° 6 :

Enveloppez, c'est pesé

Pour avoir l'aire la plus petite possible et contenir le parallélogramme ABCD sans que celui-ci bouge, le rectangle s'appuie sur l'un des deux côtés du parallélogramme. Il y a donc deux possibilités :



Le triangle DEA est un « demi triangle équilatéral » donc EA = 6 et ED = $6\sqrt{3}$;
L'aire du rectangle EBFD est 84 $\sqrt{3}$ cm².



Le triangle DFC est un « demi triangle équilatéral » donc FC = 4 et FD = $4\sqrt{3}$;
L'aire du rectangle EBFD est 64 $\sqrt{3}$ cm².

L'enveloppe doit donc avoir comme dimensions : $\boxed{16 \text{ cm et } 4\sqrt{3} \text{ cm}}$.

Exercice n° 7 :

Cocktail multicolore

Soit x l'aire de la surface à peindre en orange, y l'aire de la surface à peindre en vert et z l'aire de la surface à peindre en violet.

Pour obtenir les couleurs mélangées, il reste 2,2 m^2 de bleu, 2,4 m^2 de rouge et 2,1 m^2 de jaune.

D'où

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}z = 2{,}4 \\ \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 2{,}1 \\ \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 2{,}2 \end{cases}$$

Ensuite, on teste.

On trouve x = 2, y = 0,9 et z = 3,8.

Les surfaces à peindre en vert, orange et violet sont respectivement de 0,9 m^2, 2 m^{2}et 3,8 m^2.

Exercice n° 8

Effarant

Situation 1 :

Les instants d'émission du phare A ont lieu avec un nombre de minutes pair , alors que les instants d'émission du phare B ont lieu avec un nombre de minutes impair.

Il n'y aura donc pas de coïncidence.

Situation 2 :

Soit t l'horaire de la 1ère émission du phare B. 5 h 48 min valent 348 min ;

t est tel que $348 = n \times 10 + t$ avec $0 \leq t \leq 9$; t est le reste de la division de 348 par 10 soit 8.

Le phare B émet pour la première fois à 0 h 08 min.

Situation 3 :	Phare A : 0 – 6 – 12 – 18 – **24** – 30 – 36 – 42 – 48 - **54**…
	Phare B : 4 – 14 – **24** – 34 – 44 – **54** …

L'heure de la 1ère coïncidence entre les deux phares est 0 h 24 min

Les coïncidences suivantes ont lieu toutes les 30 min (plus petit commun multiple de 6 et 10).

La dixième coïncidence a donc lieu 9×30 min après la première, c'est à dire à 4 h 54 min.

On peut compter toutes les 30 min entre 0 h 00 et 07 h 00 à partir de la première coïncidence à 0 h 36.

Ou bien, on recherche le plus grand entier n tel que $24 + n \times 30 < 7 \times 60$ d'où $n = 13$;

Il y aura donc eu 14 coïncidences entre 0 h et 7 h.

Situation 4 :

Soit x la période d'émission du phare B. 1 h 36 min valent 96 min ;

x est tel que $96 = 5 + n \times x$ et $2 \leq x \leq 12$ donc $n \times x = 91 = 7 \times 13$ d'où $x = 7$.

La période d'émission du phare B est de 7 minutes.