2006
Épreuve officielle
solutions

Exercice n° 1 : (5 points)

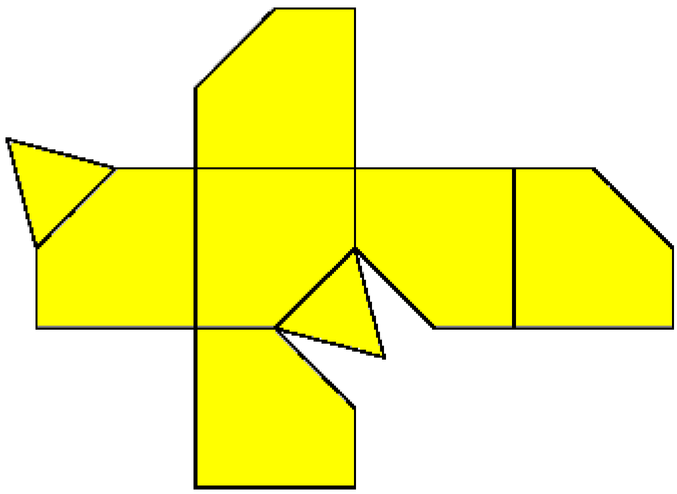
Être ou ne pas être... premier

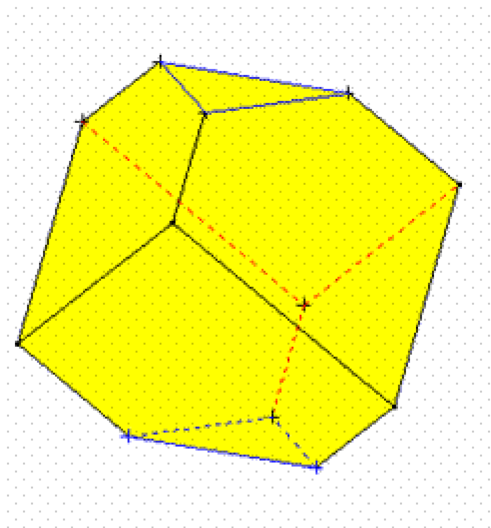
E est premier. En effet, puisque $\sqrt{E} \approx 48,1$; il suffit de tester la divisibilité de E par les nombres premiers compris entre 2 et 47.
F n'est pas premier car $F = 59 \times 509$.
G n'est pas premier car $G = 19 \times 97 \times 277$

Exercice n° 2 : (5 points)

Le solide de Dürer

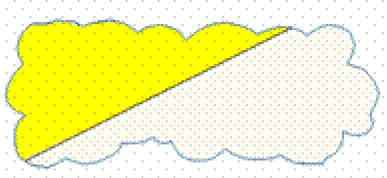
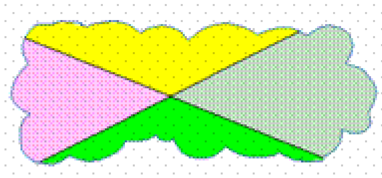
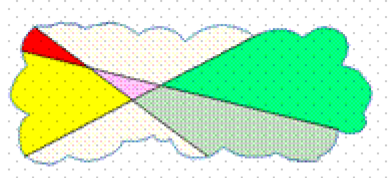
Voici un patron du solide de Dürer

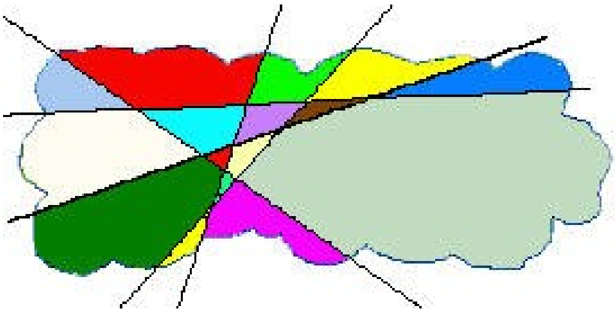
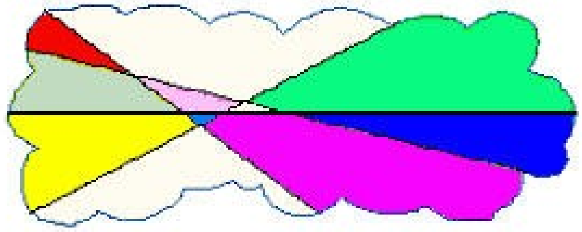




Exercice n° 3 : (8 points)

Que de régions

		
Une droite deux régions	Deux droites quatre régions	Trois droites sept régions

	
4 droites 11 régions	5 droites 16 régions

c) Récapitulons les résultats obtenus :

Nombre de droites	1	2	3	4	5	…	10
Plus grand nombre de *régions*	2	4	7	11	16	…	56

On constate sur ces exemples que pour obtenir le plus grand nombre de *régions* associées à n droites, il suffit d'ajouter n et le résultat obtenu pour $(n-1)$ droites. En appliquant cette conjecture pour $n = 11$, on obtient : $56 + 11 = \mathbf{67}$.

d) D'après la conjecture précédente appliquée à n droites (n supérieur ou égal à 2), on effectue la **somme** $\mathbf{2 + 2 + \ldots + n}$ qui se simplifie en $\mathbf{1} + \dfrac{n(n+1)}{2}$. Cette dernière formule est vraie dés $n = 1$.

Exercice n° 4 : (8 points)

Somme toute

a) 1, 9, 7, 17, 33, 57, 107, 197
b) 7, 4, 2, 13, 19, 34, 66, 119, 219, 404, 742

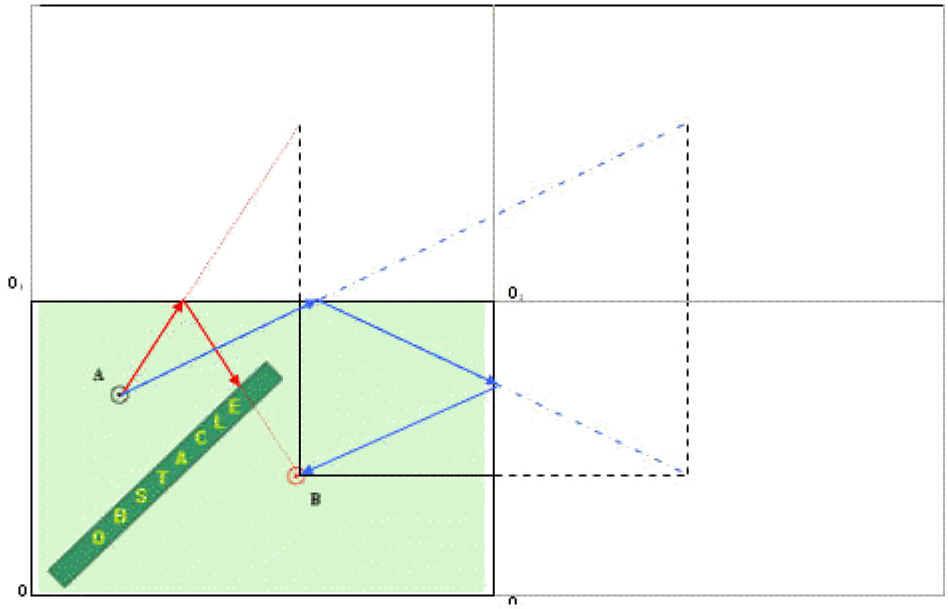
2	14, 19, 28, 47, 61, 75
3	197, 742
4	1104, 1537, 2208, 2580, 3684, 4788, 7385, 7647, 7909
5	31331, 34285, 34348, 55604, 62662, 86935, 93993
6	120284, 129106, 147640, 156146, 174680, 183186, 298320, 355419, 694280, 925993
7	1084051, 7913837
8	11436171, 33445755, 44121607
9	129572008, 251133297
10	aucun
11	24769286411, 96189170155
12	171570159070, 202366307758, 239143607789, 296658839738
13	1934197506555, 8756963649152
14	43520999798747, 74596893730427, 97295849958669
15	120984833091531, 270585509032586, 754788753590897
16	3621344088074041, 3756915124022254, 4362827422508274
17	11812665388886672, 14508137312404344, 16402582054271374, 69953250322018194, 73583709853303061

18	119115440241433462, 166308721919462318, 301273478581322148
19	1362353777290081176, 3389041747878384662, 5710594497265802190, 5776750370944624064, 6195637556095764016

Démonstration de M Dofal

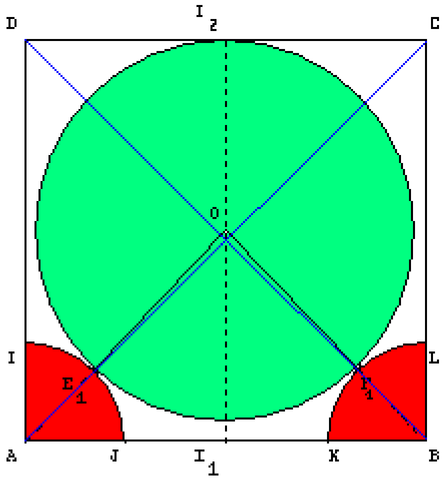
Exercice n° 5 : (5 points)

Le snooker



Exercice n° 6 : (5 points)

Le maxi disque



Soit O le centre d'un cercle Ce tangent aux arcs de cercles de l'exercice, O appartient à la médiatrice du segment [AB]. En effet, puisque Ce est tangent aux arcs de cercle, les distances OA et OB sont toutes les deux égales à la somme : 2 cm + rayon du cercle Ce.

Soient I_1 et I_2 les milieux respectivement des segments [AB] et [DC], le rayon croît lorsque O se déplace de I_1 vers I_2 : le rayon est en effet donné par la différence OA– 2 cm.
La position « maximale » est celle où le cercle Ce est tangent en I_2 à la droite (DC) (voir le dessin ci joint).
Notons x la distance (en cm) OI_1 (x appartient à l'intervalle [0;8]), alors : $OI_2 = 8 - x$ et le rayon de Ce est donné par : $\sqrt{16+x^2} - 2$. (En effet, OA = $\sqrt{16+x^2}$ d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle OI_1A rectangle en I_1).
La position « maximale » est telle que : $\sqrt{16+x^2} - 2 = 8 - x$, soit de manière équivalente : $\sqrt{16+x^2} = 10 - x$. En élevant au carré, cela implique que $16 + x^2 = (10 - x)^2$.
Cette dernière équation se résout, par exemple, en développant le carré : $16 + x^2 = 100 - 20x + x^2$ et l'on obtient $\boldsymbol{x}$ **= 4, 2**. On vérifie que ce nombre est bien solution de l'équation initiale.

Le rayon du cercle Ce vaut alors : 8 cm – 4,2 cm = **3,8 cm**.

Exercice n° 7 : (5 points)

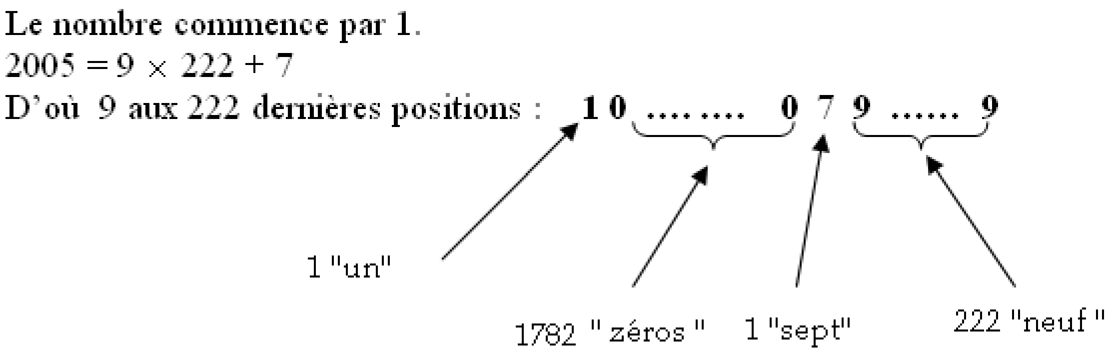
Un exercice bidonnant

Le volume d'eau est donné par $a \times b \times kh$
<u>Première position</u> : L'arête de longueur a est en position verticale,
La hauteur occupée par un volume égal à $a \times b \times kh$, dans un parallélépipède dont la base a pour dimensions h et b, est $a \times k$. Pour que le liquide ne déborde pas, nous devons donc avoir $k \times a \leq a - \frac{1}{10}a$ soit $k \leq \frac{9}{10}$.
<u>Deuxième position</u> : L'arête de longueur b est en position verticale.
La hauteur occupée par un volume de $a \times b \times kh$, dans un parallélépipède dont la base a pour dimensions h et a, est $k \times b$. Pour que le liquide ne déborde pas, nous devons donc avoir $k \times b \leq b - \frac{1}{10}b$ soit $k \leq \frac{9}{10}$.

Bilan : la solution est $\boldsymbol{k}$ = 9/10.

Exercice n° 8 : (5 points)

2006 une grande année



Nombres de KEITH

Par M. DOFAL IA-IPR mathématiques

Solution de l'exercice 197.

Ce qui est attendu des élèves de troisième ou de seconde est essentiellement une exploration systématique de tous les nombres à deux chiffres, permettant de faire émerger les six nombres 14, 19, 28, 47, 61, 75 .

Afin d'éclairer le professeur sur les ressorts de cet exercice il est proposé l'étude ci-dessous.

Cas des nombres à deux chiffres.

On note F_0, F_1, F_2 etc les termes de la suite de Fibonacci 0,1,1,2,3,5,8, etc

La suite U constituée à partir d'un nombre à deux chiffres u_0u_1 appartient à l'espace vectoriel des suites « doublement récurrentes » ($U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$ avec les conditions initiales $U_0= u_0$ et $U_1=u_1$). La théorie de ces suites permet de montrer assez facilement qu'elles constituent un sous espace à deux dimensions de l'ev des suites numériques. On recherche alors classiquement deux suites indépendantes qui en constituent alors une base.

On peut chercher des suites du type r^n .

Mais dans le cas présent il est plus intéressant de choisir la suite S déterminée par 1, 0 et la suite T déterminée par 0, 1. Ces deux suites sont linéairement indépendantes et constituent une base de l'espace considéré.

Les termes successifs de S : 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, etc

Et ceux de la suite T : 0, 1, 1, 2,3,5,8, 13, etc

On a tout simplement pour $k>0$ $S_k = F_{k-1}$ et $T_k = F_k$. $S_0=1$, $T_0=0$

Par conséquent toute suite solution W est telle qu'il existe deux réels a et b tels que pour $k>0$ $W_k = a S_k + b T_k$ (= $a F_{k-1} + b F_k$) , les scalaires a et b étant déterminés par les conditions initiales .

Si l'on part du nombre U0U1 on devra avoir W0 = U0= a S0=a et W1 = U1= aS1+bT1 = b.

Ainsi la suite W s'écrit pour k>0 Wk = U0 Fk-1+U1 Fk et W0 = U0 , W1= U1

Rechercher s'il existe un rang k tel que le nombre U0U1 réapparaisse conduit à résoudre l'équation en k : Wk = 10 U0 + U1 dans laquelle U0 et U1 sont compris entre 0 et 9.

Cette équation se transforme en U0 Fk-1+U1 Fk = 10 U0 + U1 .

Ou encore U1 (Fk -1) = U0 (10- Fk-1)

On est ainsi amené à examiner les valeurs de la suite de Fibonnacci inférieures à 10 (k est nécessairement inférieur à 7 pour que (10- Fk-1) soit >0) .

Se présentent alors les cinq équations du tableau ci-dessous

(Fk -1)	(10- Fk-1)	Équation	U0	U1	Nombre de départ
12	2	12 U1 = 2 U0	6	1	61
7	5	7 U1 = 5 U0	7	5	75
4	7	4 U1 = 7 U0	4	7	47
2	8	2 U1 = 8 U0	1 2	4 8	14 28
1	9	U1 = 9 U0	1	9	19
0	10	0 = 10 U0	0	u	0u

Étude d'une variante :

Il est facile, pendant qu'on y est de chercher si l'on peut obtenir « le nombre de départ inversé » cette fois, c'est-à-dire que partant de U0 , U1 on arrive à U1U0

Cette fois, il s'agit de résoudre l'équation :

U0 Fk-1+U1 Fk = U0 + 10 U1 c'est à dire U1 (10-Fk) = U0 (Fk-1 -1).

Un travail analogue au précédent donne alors les résultats suivants:

(Fk -1)	(10- Fk-1)	Équation	U0	U1	Nombre de départ
2	4	U1 = 2 U0	1 2 3 4	2 4 6 8	12 24 36 48
5	2	5U1 = 2U0	5	2	52
7	1	7U1 = 1 U0	7	1	71
8	0	8U1 = 0	u	0	u0

Cas des nombres à trois chiffres

Cette fois il s'agit des suites du type : Un+2 + Un+1 + Un = Un+3 les données initiales étant U0= u0 et U1= u1 et U2= u2 correspondant au nombre à trois chiffres u0u1u2 .

La théorie analogue montre cette fois l'existence d'un espace à trois dimensions dont une base est constituée par exemple par les trois suites

S : 1, 0, 0, 1, 1, 2, ...

T : 0, 1, 0, 1, 2, 3, 6, 11,

U : 0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13. ...

Toute suite solution W étant telle que Wk = u0 Sk + u1Tk + u2 Uk.

La suite S joue le rôle joué par F précédemment :

On observe (et on montre facilement) que Uk=Sk+1 et que Tk = Sk+2 - Sk+1

Ainsi Wk = u0 Sk + (u2 - u1) Sk+1 + u1 Sk+2

Rechercher s'il existe un rang k tel que le nombre le nombre à trois chiffres u0 u1 u2 réapparaisse conduit à résoudre l'équation :

u0 Sk + (u2 - u1) Sk+1 + u1 Sk+2 = 100 u0 +10 u1 + u2 qui s'écrit encore :

u1 (Sk-1 + Sk -10) + u2 (Sk+1-1) = u0 (100 - Sk) (car Sk-1 + Sk = Sk+2 - Sk+1)

Dans laquelle u0 , u1 , u2 sont des chiffres.

Compte tenu du comportement de S il apparaît que nécessairement k ≤11 pour 100 - Sk >0 et que k ≥7 pour que Sk-1 + Sk ≥10

Il y a donc à examiner les cinq équations à inconnues entières u0 , u1 , u2 dans [0 ; 9]

k =	( ) u1	+ ( ) u2	( ) u0	Solution u0,u1,u2
7	1	12	93	Solution 1,9,7 (la seule)
8	10	23	87	
9	27	43	76	
10	58	80	56	Solution 7,4,2 (la seule)
11	115	148	19	

Le travail d'analyse des trois autres équations est un peu fastidieux pour arriver à montrer qu'elles n'ont pas de solutions.

Ainsi parmi les nombres à trois chiffres seuls 197 et 742 possèdent la propriété.

Ces nombres sont connus sous le nom de nombres de Keith .

Voici ceux à quatre chiffres :

1 104 1 537 2 208 2 580 3 684

4 788 7 385 7 647 7 909

Voir par exemple : http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Iteration/Keith.htm