ÉPREUVE OFFICIELLE

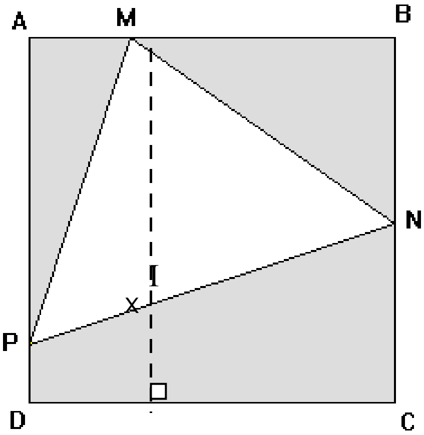
2^{e}

Mardi 15 mars 2005

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une **justification**.
Les solutions partielles seront examinées.

Exercice n°1
***5** points*

AIRE MAX



ABCD est un carré de 1 m de côté. Les points M, N et P appartiennent respectivement aux segments [AB], [BC] et [AD].

Dans les questions suivantes les aires sont exprimées en m².

1) Proposer un cas de figure où l'aire du triangle PNM vaut 0,5 .

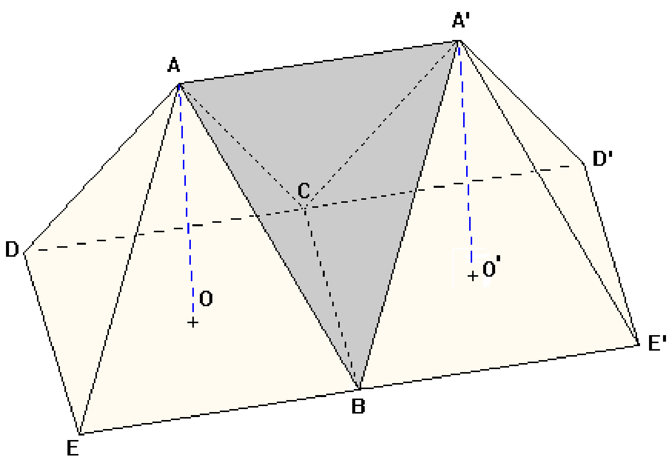
2) Proposer un cas de figure où l'aire du triangle PNM vaut .

3) Montrer que l'aire du triangle MNP représenté ci-contre est égale à MI.

4) Existe-t-il des triangles PNM dont l'aire dépasse 0,5 ?

Exercice n°2
***8** points*

LES DEUX THALÈS



On a posé sur un plan deux pyramides régulières dont les bases sont des carrés de côté 6 cm et dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux. On les accole par une arête de base comme indiqué ci-contre. Les centres O et O' des bases sont les pieds des hauteurs issues des sommets A et A' de ces deux pyramides.

1) Quelle est la nature de chacun des quadrilatères AA'O'O et AA'E'E ?
Le tétraèdre AA'BC est inséré entre les deux pyramides. Quelle est sa particularité ?

2) On souhaite réaliser le patron du solide constitué comme ci-contre par l'assemblage des deux pyramides et du tétraèdre.
a) Élodie affirme que ce solide a cinq faces ; Alexandre soutient qu'il en a neuf. Qu'en pensez-vous ?
b) Réaliser des patrons des deux pyramides de façon que, sans découpe, en assemblant ces deux patrons, on obtienne un patron du solide. Coller, sur la feuille réponse, ces deux patrons coloriés de couleurs différentes et assemblés pour former le patron du solide.

Exercice n°3 **BON 100 !**

5 points

Déterminer toutes les suites de deux ou plusieurs entiers naturels consécutifs dont la somme vaut 100.

Exemple : 2 ; 3 ; 4 ; 5 est une suite de quatre entiers naturels consécutifs dont la somme vaut 14.

Exercice n°4 **JEU DE CUBES**

5 points

Comment assembler cent cubes de 1 cm d'arête pour constituer un pavé droit, plein, d'aire totale minimale ?

Exercice n°5 **PUZZLE**

8 points

1) Construire six triangles rectangles isocèles dont les aires exprimées en cm² sont 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 et 18.
Calculer les dimensions de chacun de ces triangles.

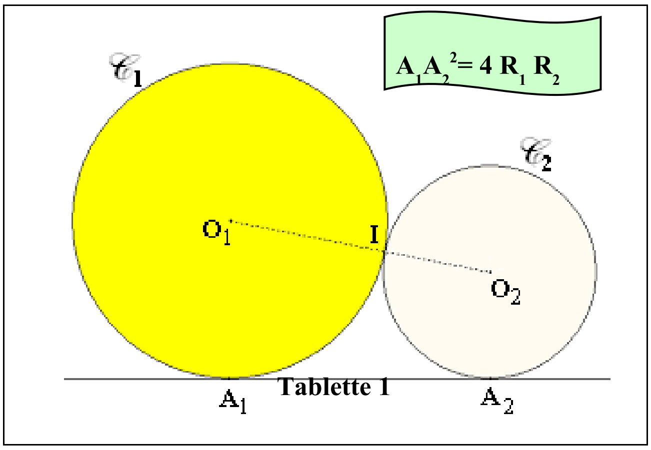
2) Ces six triangles sont les pièces d'un puzzle qui permettent de construire un autre triangle rectangle isocèle.
Expliquer la démarche qui permet de constituer le puzzle et le coller sur la feuille réponse.

Exercice n°6 **SUR DES TABLETTES JAPONAISES**

12 points

1) La tablette 1 ci-contre représente deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres respectifs O_1 et O_2 et de rayons respectifs R_1 et R_2. Ils sont tangents entre eux en I et tangents à la droite $\mathcal{D}$ respectivement en A_1 et A_2.

Démontrer la formule : $A_1A_2^2 = 4\, R_1\, R_2$.



2) On considère la tablette 2 ci-contre obtenue à partir de la tablette 1 en « insérant » un petit cercle $\mathcal{C}_3$ de rayon R_3 tangent en A_3 à $\mathcal{D}$ et aux deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
Utiliser convenablement plusieurs fois la relation établie au 1) pour démontrer la nouvelle formule :
= +

3) *Si vous n'avez pas réussi à démontrer ces formules, vous pouvez tout de même les appliquer !*

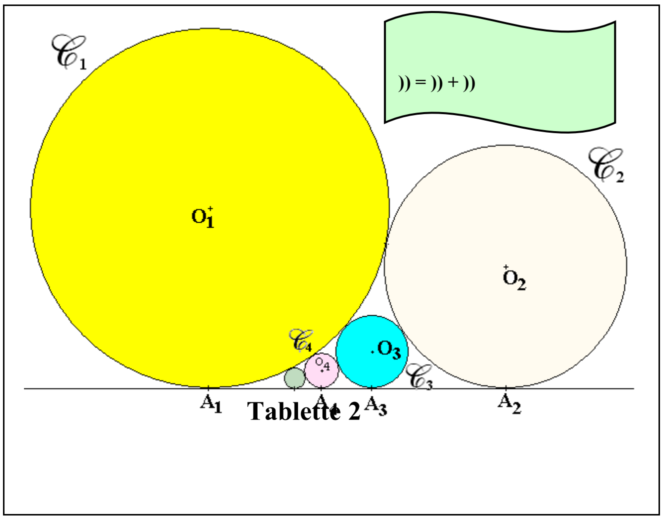
Un cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O_1, de rayon $R_1 = 9$ cm est tangent en A_1 à une droite $\mathcal{D}$. Un cercle $\mathcal{C}_2$ de centre O_2, de rayon $R_2=$ cm est tangent en A_2 à la droite $\mathcal{D}$ et tangent au cercle $\mathcal{C}_1$.

a) Calculer la distance A_1A_2. Tracer les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

b) On insère comme précédemment le cercle $\mathcal{C}_3$ de centre O_3, de rayon R_3 tangent en A_3 à $\mathcal{D}$ et tangent à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
Calculer le rayon R_3 et la distance A_1A_3. Tracer le cercle $\mathcal{C}_3$.

c) On insère comme précédemment le cercle $\mathcal{C}_4$ de centre O_4, de rayon R_4 tangent en A_4 à $\mathcal{D}$ et tangent à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$.
Calculer le rayon R_4 et la distance A_1A_4. Placer le point A_4.

On ne demande pas de tracer $\mathcal{C}_4$!



d) On imagine que l'on poursuit la construction, sur le même principe, jusqu'au cercle $\mathcal{C}_{10}$ tangent à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_9$.
En observant l'évolution des rayons R_1, R_2, R_3, R_4, indiquer une conjecture sur la meure du rayon R_{10} et la distance A_1A_{10}.

Partie complémentaire pour les classes de seconde

Exercice n°7

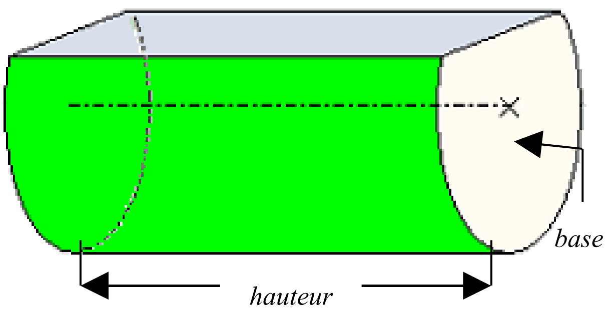
8 points

TROP PLEIN ?

1) Soit un cercle de 10 cm de rayon et une corde [AB] de ce cercle dont la distance au centre O est de 5 cm.
Démontrer que l'angle mesure 120°.

2) Déterminer l'aire A de la surface limitée par la corde [AB] et le petit arc .

3) Un bidon cylindrique a une hauteur de 30 cm et un diamètre de 20 cm. Il est posé sur l'une de ses bases. La base supérieure comporte une ouverture circulaire de 10 cm de diamètre et de même centre que cette base. Il contient un liquide dont le volume est le cinquième de celui du bidon.
Si on couche ce bidon, le liquide qu'il contient va-t-il s'échapper par l'ouverture ?

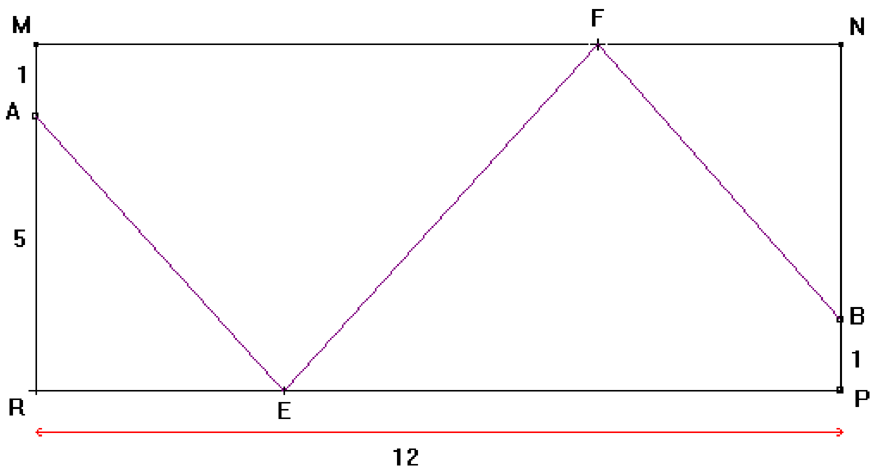


Le volume d'un cylindre coupé longitudinalement est, comme pour le cylindre complet, le produit de l'aire de la base par la hauteur.

Exercice n°8

5 points

ZIG - ZAG



MNPR est un rectangle dont la longueur MN mesure 12 unités et la largeur MR mesure 6 unités.
Le point A appartient au segment [MR] et la distance MA mesure 1 unité.
Le point B appartient au segment [PN] et la distance PB mesure 1 unité.
Le point E appartient au segment [RP], le point F au segment [MN].
Les points E et F ne sont pas quelconques : ils sont tels que le chemin AEFB soit le plus court possible.
Dans ce cas, quelle est la longueur de la ligne brisée AEFB ?

Cette manifestation est organisée par l'Académie d'Orléans-Tours
Elle a le soutien financier de la Région Centre, de Shiseido et des Caisses d'Épargne Centre Val de Loire et Val de France Orléanais.