

Épreuve officielle

Mardi 18 mars 2008

2°

Formule « Groupes » Exercices 0 à 4

Formule « Classes » Exercices 0 à 8

Exercice n°0

Questionnaire culturel

12 points

Compléter les deux pages de la feuille annexe. Elle doit être rendue avec les feuilles réponses.

Exercice n°1

À la mode de Fibonacci

5 points

Le papyrus Rhind nous donne des indications sur l'utilisation des fractions en Égypte il y a plus de 3000 ans. Les égyptiens utilisaient uniquement, à l'exception de la fraction $\frac{2}{3}$, les fractions de la forme $\frac{1}{n}$ et les sommes $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \dots$ de deux ou de plusieurs fractions de dénominateurs p, q, \dots tous différents.

Les doubles $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ ou les multiples $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots$ étaient systématiquement remplacés par des sommes de dénominateurs différents. Exemple : $\frac{3}{4}$ n'est pas $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

Voici un algorithme décrit par Léonard de Pise (dit Fibonacci) dans le *Liber abaci* paru en 1202 :

Étapes	Description à partir d'une fraction $\frac{a}{b}$ (où $\frac{a}{b} < 1$)
Étape n°1	Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $p \geq \frac{b}{a}$. Mémoriser cet entier p . On passe ensuite à l'étape n°2.
Étape n°2	On calcule $\frac{a}{b} - \frac{1}{p}$ sous la forme d'une fraction. Si cette fraction est égale à 0 on passe à l'étape n°3, sinon on passe à l'étape n°1 avec cette nouvelle fraction.
Étape n°3	On écrit la décomposition de $\frac{a}{b}$ en la somme des inverses de tous les entiers p mémorisés.

Exemple avec $\frac{11}{12}$ ($\frac{11}{12} < 1$) :

Étape n°1 $\frac{b}{a} = \frac{12}{11} \approx 1,1$ donc $p = 2$. On mémorise **2**.

Étape n°2 $\frac{a}{b} - \frac{1}{p} = \frac{11}{12} - \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$. Comme $\frac{5}{12} \neq 0$, on passe à l'étape n°1 avec cette fraction.

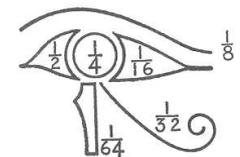
Étape n°1 Maintenant $\frac{a}{b} = \frac{5}{12}$. $\frac{b}{a} = \frac{12}{5} = 2,4$ donc $p = 3$. On mémorise **3**.

Étape n°2 $\frac{a}{b} - \frac{1}{p} = \frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$. Comme $\frac{1}{12} \neq 0$, on passe à l'étape n°1 avec cette fraction.

Étape n°1 Maintenant $\frac{a}{b} = \frac{1}{12}$. $\frac{b}{a} = \frac{12}{1} = 12$ donc $p = 12$. On mémorise **12**.

Étape n°2 $\frac{a}{b} - \frac{1}{p} = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0$. On passe donc à l'étape n°3.

Étape n°3 $\frac{11}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$.



Faire fonctionner cet algorithme pour : $\frac{7}{10}$ et $\frac{3}{7}$.

Exercice n°2**Jours fériés bien placés !****5 points**

Plongée dans son agenda, Margot constate que le 11 novembre 2007 était un dimanche. Son papa lui rappelle que toutes les années ne peuvent pas être aussi exceptionnelles que l'année 2002 pour la position de certains jours fériés. En effet, cette année-là, ni le 1er janvier, ni le 1er mai, ni le 8 mai, ni le 15 août, ni le 1er novembre, ni le 11 novembre, ni le 25 décembre ne tombaient un samedi ou un dimanche.



1. Le 1er janvier 2002 était un mardi. À quels jours de la semaine correspondaient les 1er mai, 8 mai, 15 août, 1er novembre, 11 novembre et 25 décembre ?
2. L'année 2024 (année bissextile) sera aussi exceptionnelle que l'année 2002. À quel jour de la semaine correspondra le 1er janvier 2024 ?

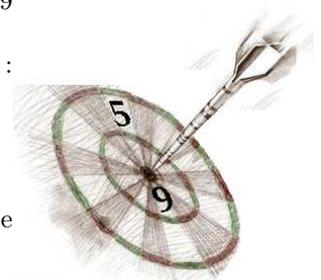
Exercice n°3**Sous les pavages ...****8 points**

On dispose de carreaux de faïence rectangulaires de dimensions 2 cm sur 3 cm. Tous les carrelages (ou pavages) seront réalisés avec des carreaux **entiers**, en les posant **bord à bord, sans joint**.

1. Est-il possible de carrelé un rectangle d'aire 15 cm^2 avec de tels carreaux ?
2. (a) Proposer un pavage d'un rectangle de dimensions 8 cm sur 6 cm.
(b) Proposer un pavage d'un rectangle de dimensions 12 cm sur 7 cm.
3. Proposer trois rectangles, de dimensions différentes, que l'on peut carrelé en plaçant exactement cinq carreaux de faïence. On illustrera les réponses par des dessins.
4. On dispose de onze carreaux. En les utilisant tous, quels sont, en indiquant leurs dimensions, les rectangles que l'on peut obtenir ? Préciser les dimensions de celui qui a le périmètre minimum.

Exercice n°4**Un exercice bien ciblé****8 points**

1. On peut lancer autant de fléchettes que l'on veut sur cette cible. On marquera 5 ou 9 points à chaque lancer. Bien sûr, tous les scores sont des nombres entiers et certains scores sont impossibles : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 par exemple.
 - (a) Peut-on obtenir les scores suivants : 21 ? 44 ?
 - (b) Existe-t-il un plus grand score que l'on ne puisse pas atteindre ?
2. Si au lieu de 5 et 9, on choisit 6 et 8, existe-t-il un plus grand score que l'on ne puisse pas atteindre ?
3. Si au lieu de 5 et 9, on choisit deux nombres entiers, dont l'un est multiple de l'autre, existe-t-il un plus grand score que l'on ne puisse pas atteindre ?
4. Si au lieu de 5 et 9, on avait :
 - 5 et 7, quel serait le plus grand score que l'on ne puisse pas atteindre ?
 - 2 et 3, quel serait le plus grand score que l'on ne puisse pas atteindre ?



Fin des exercices de la Formule « Groupes »

Exercice n°5**Savez-vous plier les crêpes ? (Sur un air bien connu)****5 points**

Jules fait des crêpes circulaires de 20 cm de diamètre. Pour une belle présentation, il replie les bords vers l'intérieur de façon à obtenir un triangle équilatéral dont les sommets se trouvent sur le bord de la crêpe.

1. Représenter sur votre feuille réponse et à l'échelle $1/2$, la crêpe avec ses bords rabattus.
2. Expliquer et justifier avec précision les constructions géométriques à effectuer.
3. Calculer en cm^2 l'aire du triangle équilatéral obtenu.



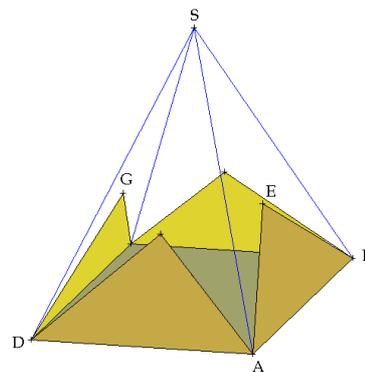
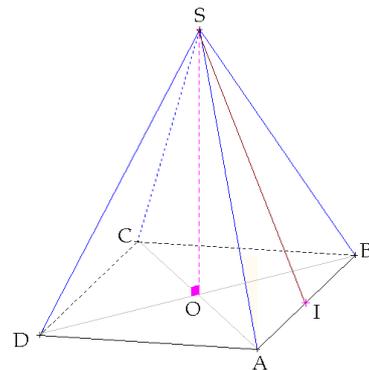
Exercice n°6**De quoi prendre de la hauteur****12 points**

On considère une pyramide régulière $SABCD$ de sommet S et dont la base est un carré $ABCD$ de centre O , de 4 cm de côté.

- Sur la face SAB , on trace un triangle ABE de telle sorte que si on le découpait pour le rabattre sur la base, le point E coïnciderait avec le centre O du carré $ABCD$.

On trace sur les trois autres faces triangulaires de la pyramide, trois autres triangles CBF , CDG et ADH superposables à ABE de telle sorte que si on découpait les quatre triangles pour les rabattre sur la base, ils reformeraient le carré de base.

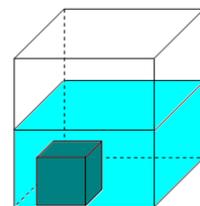
- De plus, on suppose que $EG = 2$ cm.
 - On admettra que les points E, F, G et H sont dans un même plan horizontal.
1. Calculer la valeur exacte de la hauteur SI du triangle SAB .
 2. Tracer en vraie grandeur le patron de cette pyramide avec les quatre triangles dessinés sur les faces.
 3. Calculer la valeur exacte de la hauteur SO de cette pyramide.

**Exercice n°7****Poisson³****8 points**

On considère un aquarium ayant la forme d'un pavé droit de base carrée d'aire 3 dm^2 et de hauteur 2 dm. On verse une quantité d'eau dans l'aquarium et on y place un cube plein qui reste toujours au fond.

Tous les résultats seront arrondis à 0,1 dm près.

1. L'arête du cube est de 0,5 dm.
 - (a) Si l'aquarium contient un litre d'eau, quelle est la hauteur de l'eau ?
 - (b) Si l'aquarium contient 1,5 litre d'eau, quelle est la hauteur de l'eau ?
2. L'aquarium contient 3 litres d'eau.
Peut-on trouver un cube qui, une fois placé dans l'aquarium, permette d'obtenir une hauteur d'eau de 1,5 dm ?
3. L'aquarium contient 1,5 litre d'eau.
Peut-on trouver un cube qui, une fois placé dans l'aquarium, soit tel que le niveau de l'eau soit égal à la hauteur du cube ?

**Exercice n°8****Que celui qui le peut ...****8 points**

Dans les « *Propositiones Alcuini doctoris Carolo Magni Imperatori ad acuendos juvenes* », Alcuin (735-804) donne la formulation suivante d'un problème :

Un maître de maison a 100 personnes à son service auxquelles il prévoit de donner 100 boisseaux de blé : 3 boisseaux par homme, 2 boisseaux par femme et 1/2 boisseau par enfant. Que celui qui le peut, dise combien il y avait d'hommes, de femmes et d'enfants.

Alcuin donne sa réponse : 11 hommes, 15 femmes et 74 enfants.

Mais ce n'est pas la seule solution à ce problème... Que celui qui le peut, nous donne toutes les autres solutions !

**Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.
Les solutions partielles seront examinées.**