RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE
Épreuve préparatoire
2°

Décembre 2007

Formule « Groupes » Exercices 1 à 4

Formule « Classes » Exercices 1 à 8

Exercice n°1 — Attention aux chutes !

8 points

Certains mathématiciens s'intéressent à des échafaudages de fractions d'un type particulier. Par exemple $A = 2 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$ est un tel échafaudage. Il s'avère qu'après un calcul effectif, on vérifie que $A = \dfrac{13}{5}$.

Un algorithme a été élaboré qui, inversement permet à partir d'une fraction $\dfrac{a}{b}$ comme $\dfrac{13}{5}$ de reconstruire un tel échafaudage. Il vous est présenté grâce au tableau ci-dessous :

Etapes	**Description à partir d'une fraction** $\dfrac{a}{b}$
n°1	On effectue la <u>division euclidienne</u> de a par b. On note q le quotient et r le reste obtenus. On a : $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$. On a alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{bq+r}{b}$ et donc on peut écrire $\dfrac{a}{b} = q + \dfrac{r}{b}$ avec $r < b$. On passe ensuite à l'étape n°2.
n°2	Si $r = 0$ alors on passe à l'étape n°4, sinon on passe à l'étape n°3.
n°3	Comme $r \neq 0$, on écrit la fraction $\dfrac{r}{b}$ sous la forme de l'inverse de son inverse et donc $\dfrac{a}{b} = q + \dfrac{1}{\left(\frac{b}{r}\right)}$. On passe à l'étape n°1 avec la fraction $\dfrac{b}{r}$.
n°4	On écrit l'échafaudage final.

Exemple avec $\dfrac{13}{5}$:

a	b	q	r
13	5	2	3
5	3	1	2
3	2	1	1
2	1	1	0

Etape n°1 $13 = 5 \times 2 + 3$
Etape n°2 $r = 3 \neq 0$, on passe donc à l'étape n°3
Etape n°3 $\dfrac{13}{5} = 2 + \dfrac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)}$ on passe à l'étape n°1 avec la fraction $\dfrac{5}{3}$
Etape n°1 $5 = 3 \times 1 + 2$
Etape n°2 $r = 2 \neq 0$, on passe donc à l'étape n°3
Etape n°3 $\dfrac{5}{3} = 1 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)}$ donc $\dfrac{13}{5} = 2 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)}}$ on passe à l'étape n°1 avec la fraction $\dfrac{3}{2}$
Etape n°1 $3 = 2 \times 1 + 1$
Etape n°2 $r = 1 \neq 0$, on passe donc à l'étape n°3
Etape n°3 $\dfrac{3}{2} = 1 + \dfrac{1}{\left(\frac{2}{1}\right)}$ donc $\dfrac{13}{5} = 2 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\left(\frac{2}{1}\right)}}}$ on passe à l'étape n°1 avec la fraction $\dfrac{2}{1}$
Etape n°1 $2 = 2 \times 1 + 0$
Etape n°2 $r = 0$, on passe donc à l'étape n°4
Etape n°4 L'échafaudage final est $\boxed{\dfrac{13}{5} = 2 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$

Faire fonctionner cet algorithme pour $\dfrac{8}{3}$, $\dfrac{225}{157}$, $\dfrac{12}{5}$ et $\dfrac{11}{43}$.

Exercice n°2 — Sacrés vendredis 13

5 points

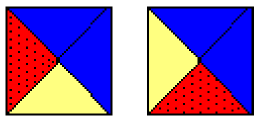
Le 1er janvier 2041 sera un mardi.
Y aura-t-il des vendredis 13 cette année-là ? Si oui, combien et quels mois tomberont-ils ?

Exercice n°3 — Couper Coller

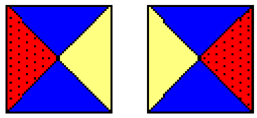
8 points

On fabrique un jeu de pions carrés. Chaque carré est divisé, par ses diagonales, en quatre triangles. A l'aide de trois couleurs (bleu, jaune, rouge) on colorie les quatre triangles afin d'obtenir des pions différents. Un pion peut contenir 1 ou 2 ou 3 couleurs ; il en existe 24 en tout, tous différents.

On considère que les deux pions ci-contre sont différents :



En revanche, les deux pions ci-contre sont identiques :

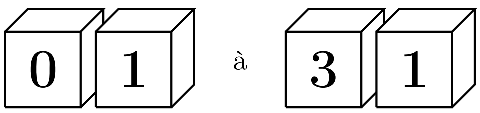


En choisissant 3 cm de côté pour les carrés, colorier les 24 pions différents.
Découper et coller ces pions sur la feuille réponse afin d'obtenir un rectangle de 12 cm sur 18 cm en respectant la consigne suivante : les côtés en contact de deux carrés sont de la même couleur.

Exercice n°4 — Le calendrier futé

5 points

Un calendrier de bureau donnant le numéro du jour du mois est constitué de deux cubes que l'on pose côte à côte, l'un rouge, l'autre bleu, dont chaque face porte un chiffre entre 0 et 9.
Les différentes dispositions des deux cubes doivent permettre de former tous les nombres de



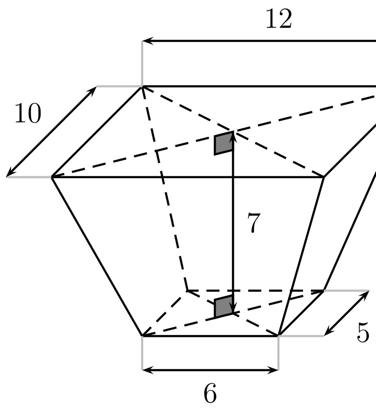
On sait que sur deux faces du cube bleu figurent les chiffres 1 et 2 et que sur trois faces du cube rouge figurent les chiffres 3, 4 et 5.
Quels chiffres portent les trois faces restantes du cube rouge ?
Quels chiffres portent les quatre faces restantes du cube bleu ?

Fin des exercices de la Formule « Groupes »

Exercice n°5 D'après Bhaskara

8 points

Le mathématicien hindou Bhaskara (XIIe siècle) explique, dans son traité « La Lilavati » , comment calculer le contenu d'une excavation en forme de tronc de pyramide, à bases rectangulaires parallèles, dont les dimensions sont celles de la figure ci-dessous.



Bhaskara donne en toutes lettres sa méthode de calcul : « *La somme des aires des bases et de l'aire d'un rectangle de largeur la somme des largeurs des bases et de longueur la somme des longueurs des bases, étant divisée par six puis multipliée par la profondeur, donne le volume* » .
Calculer le volume de cette excavation par la méthode de Bhaskara.
Calculer le volume de ce tronc de pyramide en le considérant comme la différence des volumes de deux pyramides.
Comparer les deux résultats.

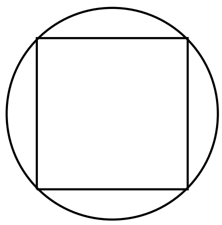
Exercice n°6 Quand les pourcentages se mettent à table

5 points

Une table carrée est munie de quatre abattants disposés comme sur le dessin, qui permettent de la transformer en table ronde.

1. De quel pourcentage augmente la surface en utilisant les abattants ?
2. De quel pourcentage augmente le périmètre en utilisant les abattants ?

Donner les résultats arrondis à 1 % près.



Exercice n°7 — Attention la tête

8 points

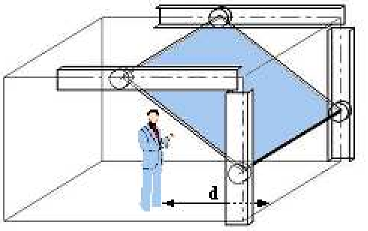


Figure 1

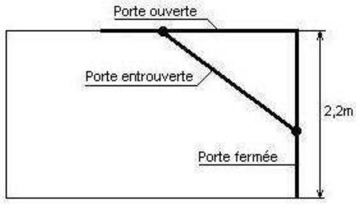


Figure 2

Un garage est équipé d'une porte basculante se déplaçant sur des rails. La porte a une hauteur de 2,20 m. Elle s'ouvre en coulissant vers le plafond grâce à des roulettes.
Au cours de son trajet, de la position fermée à la position ouverte, elle bascule vers l'intérieur du garage.

1. Sur le même dessin (comme celui de la figure 2), représenter à l'échelle 1/20 les deux positions suivantes de la porte :
   position 1 : un ballon de 40 cm de diamètre passe juste sous la porte. (tracé en rouge)
   position 2 : une automobile de 1,50 m de haut passe juste sous la porte. (tracé en vert)
2. En utilisant et en complétant le dessin, déterminer graphiquement à quelle distance minimale d de la porte fermée doit se tenir à l'intérieur du garage, un homme de 1,80 m pour ne pas être heurté par la porte pendant son mouvement complet d'ouverture (on assimilera l'homme à un segment vertical de 1,80 m).

Exercice n°8 — L'héritage du Cheikh

5 points

Voici un problème bien connu :

> Un cheikh, père de trois fils, décède en laissant dix-sept chameaux en héritage à ses enfants. Par testament, il avait légué
> - la moitié de ses bêtes à l'aîné ;
> - le tiers au cadet ;
> - le neuvième au benjamin.
>
> Le partage semblant impossible aux héritiers, le sage du lieu vient à leur secours en leur proposant la solution suivante :
> « Je vous donne mon chameau. Avec 18 animaux, le partage se fait aisément : L'aîné aura $18 \times \frac{1}{2} = 9$, le cadet aura $18 \times \frac{1}{3} = 6$ et le benjamin aura $18 \times \frac{1}{9} = 2$.
> Voilà, $9 + 6 + 2 = 17$, il reste un chameau, c'est le mien, je le récupère et vous salue bien ».

Il existe d'autres variantes à ce problème. Par exemple, avec 5 chameaux :
$\frac{1}{3}$ pour l'aîné, $\frac{1}{3}$ pour le cadet et $\frac{1}{6}$ pour le benjamin. (2 ; 2 ; 1) chameaux
$\frac{1}{2}$ pour l'aîné, $\frac{1}{6}$ pour le cadet et $\frac{1}{6}$ pour le benjamin. (3 ; 1 ; 1) chameaux

Pour 11 chameaux, trouver tous les partages possibles, sachant qu'il y a toujours trois fils, et que toutes les fractions sont de type $\frac{1}{n}$.

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.
Les solutions partielles seront examinées.
Bon courage et rendez-vous le 18 mars pour l'épreuve officielle.